

# EPREUVE CCP PSI 2012, MATH I en 4 h

\*\*\*\*\*

Calculatrice autorisée

\*\*\*\*\*

## PARTIE 1

1. Travaillons par équivalence :

$X(t) = e^{\lambda t}V$  est solution de  $(E_0)$

SSI  $X'(t) = AX(t)$

SSI  $\lambda e^{\lambda t}V = Ae^{\lambda t}V$

SSI  $\lambda V = AV$  car  $e^{\lambda t} \neq 0$

SSI  $V$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  car  $V \neq 0$  d'après l'énoncé.

2. La calculatrice étant autorisée, n'hésitons pas !

2.1. Pour  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on trouve 4 valeurs propres complexes simples :

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2, i, -i\}$$

Puis pour chaque valeur propre, une base de l'espace propre :

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

puis deux espaces conjugués

$$E_i = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-i} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

D'après la question I.1, on en déduit 4 solutions de  $(E_0)$  :

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_4(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à montrer que la famille  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  forme un système fondamental de solutions.

Calculons le wronskien de cette famille :

$$w(t) = \det W(t) = e^t e^{2t} e^{it} e^{-it} \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2ie^{3t} \neq 0$$

Il est non nul :  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  est un système fondamental de solutions.

On en déduit que la solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$X(t) = \lambda_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  quatres complexes.

**2.2.** Ecrivons le système obtenu :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + te^t \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - te^t \end{cases}$$

Suivons les indications de l'énoncé et commençons par trouver  $x_2$  :

$$x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

les solutions de l'équation homogène sont les applications  $t \mapsto \lambda e^{2t}$ .

Comme  $2 \neq 1$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $t \mapsto P(t)e^t$  ou  $P$  est un polynôme de degré 0, soit une constante. En remplaçant, on trouve  $P(t) = -1$ .

Au final,  $x_2 : t \mapsto \lambda_2 e^{2t} - e^t$  avec  $\lambda_2$  réel.

Passons ensuite à  $x_3$  :

$$x_3'(t) - x_3(t) = \lambda_2 e^{2t} - e^t$$

C'est encore une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

les solutions de l'équation homogène sont les applications  $t \mapsto \lambda e^t$ .

$t \mapsto te^t$  est solution particulière pour le second membre égal à  $t \mapsto e^t$ .

Cherchons une solution particulière pour le second membre égal à  $\lambda_2 e^{2t}$ .

Comme  $2 \neq 1$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $t \mapsto P(t)e^{2t}$  ou  $P$  est un polynôme de degré 0, soit une constante. En remplaçant, on trouve  $P(t) = \lambda_2$ .

Au final,  $x_3 : t \mapsto \lambda_3 e^t + \lambda_2 e^{2t} - te^t$  avec  $\lambda_3$  réel.

Passons ensuite à  $x_1$  et  $x_4$  :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + te^t \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_4(t) + \lambda_3 e^t + e^t \\ x_4'(t) = x_1(t) + \lambda_3 e^t - 2te^t + e^t \end{cases}$$

C'est un système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Inutile de passer par les matrices. On remarque en effet que en dérivant la ligne 1 et à l'aide de la ligne 2 :

$$x_1''(t) = -x_4'(t) + \lambda_3 e^t + e^t = -x_1(t) + 2te^t \text{ soit encore}$$

$$x_1''(t) + x_1(t) = 2te^t$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique a pour racine  $i$  et  $-i$  (on retrouve les vap de A).

Les solutions réelles sont les  $t \mapsto \alpha \cos t + \beta \sin t$ .

Comme  $1 \neq \pm i$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $t \mapsto P(t)e^t$  ou  $P$  est un polynôme de degré 1, soit une constante. Notons  $P(t) = at + b$  et en remplaçant, on trouve  $P(t) = t - 1$ .

Au final,  $x_1 : t \mapsto \alpha \cos t + \beta \sin t + te^t - e^t$  avec  $\alpha, \beta$  réels.

Il ne reste plus qu'à dériver pour obtenir que

$$x_4(t) = -x_1'(t) + \lambda_3 e^t + e^t = \alpha \sin t - \beta \cos t + \lambda_3 e^t + e^t - te^t.$$

$$\text{D'où la solution } \begin{cases} x_1(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + te^t - e^t \\ x_2(t) = \lambda_2 e^{2t} - e^t \\ x_3(t) = \lambda_3 e^t + \lambda_2 e^{2t} - te^t \\ x_4(t) = \alpha \sin t - \beta \cos t + \lambda_3 e^t + e^t - te^t \end{cases}$$

Ajoutons alors les conditions initiales de l'énoncé : 
$$\begin{cases} x_1(0) = -1 = \alpha - 1 \\ x_2(0) = -1 = \lambda_2 - 1 \\ x_3(0) = -1 = \lambda_3 + \lambda_2 \\ x_4(0) = 0 = -\beta + \lambda_3 + 1 \end{cases}$$

Ce système se résout facilement :  $\alpha = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, \beta = 0$

d'où la solution : 
$$X(t) = \begin{pmatrix} te^t - e^t \\ -e^t \\ -e^t - te^t \\ -te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -(t+1)e^t \\ -te^t \end{pmatrix}.$$

## PARTIE 2

1. On considère la solution  $X$  de  $(E_0)$  telle que  $X(t_0) = V$ , soit  $\Phi_{t_0}(X) = V$ .

Comme  $\Phi_{t_0}$  est un isomorphisme, on  $\Phi_{t_0}^{-1}(V) = X$ .

Appliquons alors  $\Phi_t$  à la relation précédente :  $(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(V) = X(t)$

2. 2.1. Notons  $A$  cette matrice : la  $j$ -ème colonne de  $A$  est l'expression de  $\Phi_{t_0}(X_j) = X_j(t_0)$  par rapport à la base canonique  $(C_1 \dots C_n)$ . C'est donc bien la matrice wronskienne  $W(t_0)$ .

- 2.2. Montrons que la matrice  $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$  est indépendante du système fondamental  $(X_1, \dots, X_n)$  choisi.

Utilisons les questions précédentes :

par II.2.1,  $R(t, t_0)$  est la matrice de l'application linéaire  $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$  qui va de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  dans lui-même, muni de sa base canonique  $(C_1 \dots C_n)$ . La  $j$ -ème colonne de  $R(t, t_0)$  est donc l'expression de  $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(C_j)$  par rapport à la base canonique  $(C_1 \dots C_n)$ .

Par II.1,  $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(C_j)$  est la solution de  $(E_0)$  vérifiant la condition initiale  $\Phi_{t_0}(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(C_j))(t_0) = C_j$  : cette solution ne dépend pas du système fondamental  $(X_1, \dots, X_n)$  choisi :

la matrice  $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$  est indépendante du système fondamental  $(X_1, \dots, X_n)$ .

*Une autre méthode* consiste à prendre un autre système fondamental  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , de noter  $P$  la matrice de passage de  $(X_1, \dots, X_n)$  à  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , bases de l'espace de départ  $S_0$ . Il faut faire attention ensuite aux notations : en mettant  $X$  et  $Y$  en indice pour les désigner les bases considérées : par la formule de changement de bases, on a  $W_Y(t_0) = W_X(t_0)P$  et  $W_Y(t) = W_X(t)P$ . En calculant, on obtient  $W_Y(t) \circ (W_Y(t_0))^{-1} = W_X(t) \circ (W_X(t_0))^{-1}$  donc la matrice  $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$  est indépendante du système fondamental  $(X_1, \dots, X_n)$ .

3. 3.1. On a donc  $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$ .

En dérivant par rapport à  $t$ ,  $R'(t, t_0) = W'(t)(W(t_0))^{-1}$ .

De plus,  $W(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  donc  $W'(t) = (X_1'(t), \dots, X_n'(t))$ . Or les fonctions  $X_i$  sont des solutions de  $(E_0)$  :  $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$ .

On obtient donc  $W'(t) = (X_1'(t), \dots, X_n'(t)) = A(t)(X_1(t), \dots, X_n(t)) = A(t)W(t)$  d'où au final,  $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$ .

Multiplions cette relation par  $V$  : on obtient que  $X(t) = R(t, t_0)V$  est solution de  $(E_0)$ .

De plus, en  $t_0$ ,  $X(t_0) = R(t_0, t_0)V = V$ .

$X(t) = R(t, t_0)V$  est donc l'unique ( problème de Cauchy) solution de  $(E_0)$  vérifiant  $X(t_0) = V$ .

- 3.2. En calculant,  $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = W(t_2)(W(t_1))^{-1}W(t_1)(W(t_0))^{-1} = W(t_2)(W(t_0))^{-1} = R(t_2, t_0)$ .

En particulier,  $R(t_0, t)R(t, t_0) = R(t_0, t_0) = I_n$  : la matrice  $R(t, t_0)$  est inversible et son inverse est

$$(R(t, t_0))^{-1} = R(t_0, t)$$

4. 4.1. Comme  $X(t) = R(t, t_0)V(t)$ , en dérivant le produit de matrices, on a  $X'(t) = R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t)$ .

Or d'après II.3.1,  $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0) : X'(t) = A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t)$ .

Comme  $X$  est solution de  $(E)$ , on en déduit que  $R(t, t_0)V'(t) = B(t)$ .

4.2. Cette question comporte une erreur d'énoncé car  $V$  n'est pas solution de  $V$ . Par contre, l'expression demandée de  $V$  est juste

De la question précédente, on déduit que  $V'(t) = R(t, t_0)^{-1}B(t) = R(t_0, t)B(t)$  par II.3.2.

En prenant une primitive, on en déduit que  $V(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u) du$  convient.

4.3. Notons alors  $Y(t) = R(t, t_0)V(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u) du = \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, u)B(u) du$ .

Par II.4.4., on a  $Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du$ .

La fonction  $Y$  est dérivable sur  $I$  et par II.4.1

$Y'(t) = R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)Y(t) + R(t, t_0)R(t_0, t)B(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ .

$Y$  est donc une solution particulière de  $(E)$ .

## PARTIE 3

1. 1.1. Cherchons une solution polynomiale sous la forme  $y(t) = a_m t^m + \dots + a_0$  avec  $a_m \neq 0$ .

Le polynôme  $y$  est donc de degré  $m$ . Sa dérivée est de degré  $m-1$  et  $t(t-1)y''(t)$  est aussi de degré  $m$ .

Comme  $y$  est solution de  $(e_0)$ , en cherchant le terme de degré  $m$  dans

$$t(t-1)y''(t) + 3y'(t) + 6y(t) = 0$$

On obtient  $m(m-1)a_m t^m + 6a_m t^m = 0$  avec  $a_m \neq 0$ .

On en déduit que  $m(m-1) + 6 = 0$  soit  $m = 3$  ou  $m = -2$ , cette dernière solution étant impossible.

Les solutions polynomiales sont donc de degré 3.

Notons alors  $y(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  une telle solution.

Remplaçons dans l'équation  $(e_0)$  :

En regroupant les termes de même degré

$$(6a - 6a)t^3 + (2b - 6a + 9a - 6b)t^2 + (-2b + 6b - 6c)t + 3c - 6d = 0$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} b = \frac{3}{4}a \\ c = \frac{2}{3}a \\ d = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

Les polynômes solutions de  $(e)$  sont donc les  $P(t) = \frac{a}{4}(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)$ .

Si on ajoute la condition initiale  $P(0) = 1$ , on obtient que  $a = 4$  et l'unique solution est alors

$$P(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$$

1.2. Soit  $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ . Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .

On obtient en dérivant

$$Q'(t) = \frac{2}{(1-t)^3}, \quad Q''(t) = \frac{6}{(1-t)^4}.$$

En remplaçant dans  $(e)$ , on trouve bien que  $Q$  est solution de  $(e_0)$ .

**1.3.** i. On cherche maintenant les solutions développables en série entière.

Ecrivons une telle solution sous la forme  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  et notons  $R$  son rayon de convergence.

Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ .

De plus,  $y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$ ,  $y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$ .

Remplaçons dans  $(e_0)$  :

$$(t^2 - t) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-1} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

Soit en faisant les changements d'indices adéquates :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} t^k + 3 \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

L'intervalle commun de sommation va de 2 à  $\infty$  : par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que :

$$a_1 = a_0/2, a_2 = 3a_1/2 \text{ et}$$

$$\forall k \geq 2, (k(k-1) - 6) a_k + (3(k+1) - k(k+1)) a_{k+1} = 0,$$

$$\text{soit } (k-3)(k+1) a_{k+1} = (k-3)(k+2) a_k.$$

D'où  $\boxed{\text{si } k \neq 3, a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1} a_k.}$

Au final, on peut donc écrire que  $a_1 = 2a_0$ ,  $a_2 = 3a_0$ ,  $a_3 = \frac{4}{3}a_2 = 4a_0$  et  $\forall k \geq 4$ ,

$$a_k = \frac{k+1}{k} a_{k-1}.$$

$$\text{On a alors } a_k = \frac{k+1}{k} a_{k-1} = \frac{k+1}{k} \frac{k}{k-1} a_{k-2} = \dots = \frac{k+1}{k} \frac{k}{k-1} \dots \frac{6}{5} a_4 = \frac{k+1}{5} a_4.$$

La série entière s'écrit donc  $\boxed{y(t) = a_0(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) + \frac{a_4}{5} \sum_{k=4}^{\infty} (k+1) t^k.}$

Trouvons le rayon de convergence de la série entière :

– Si  $a_4 = 0$ , on a la série entière nulle de rayon  $+\infty$ .

– Si  $a_4 \neq 0$ , les coefficients sont tous non nuls : utilisons la règle de d'Alembert :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+2}{k+1} \text{ qui tend vers 1 quand } k \rightarrow +\infty. \text{ Le rayon est alors } R = 1$$

ii. Avec la question précédente, on en déduit que  $k_0 = 4 : \forall k \geq 4, \boxed{a_k = \frac{k+1}{5} a_4.}$

Retrouvons alors les fonctions  $P$  et  $Q$ .

Trouver le développement en série entière de  $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ .

Partons du DSE connu :  $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ , de rayon  $R = 1$ .

On peut le dériver sur  $] -1, 1[$  et on obtient alors

$$Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k$$

Dans l'expression précédente, nous avons

$$\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)t^k - 1 - 2t - 3t^2 - 4t^3 = Q(t) - P(t)$$

Au final, on trouve donc que la série entière précédente s'écrit  $y(t) = a_0 P(t) + \frac{a_4}{5} (Q(t) - P(t))$

On retrouve donc  $P$  en prenant  $a_0 = 1$  et  $a_4 = 0$  et  $Q$  en prenant  $a_0 = 1$  et  $a_4 = 5$

**2. 2.1.** On pose  $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  donc

$$X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Posons alors  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$  et  $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$

On obtient alors l'équation matricielle (E) :  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ .

**2.2.** Il s'agit d'inverser la matrice  $W(t_0) = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \\ f'_0 & g'_0 \end{pmatrix}$ .

Par la formule  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(Com A)$ , on obtient  $W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0 g'_0 - f'_0 g_0} \begin{pmatrix} g'_0 & -g_0 \\ -f'_0 & f_0 \end{pmatrix}$ .

Calculons ensuite la résolvante :  $R(t, t_0) = W(t)W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0 g'_0 - f'_0 g_0} \begin{pmatrix} f g'_0 - g f'_0 & f_0 g - g_0 f \\ f' g'_0 - f'_0 g' & g' f_0 - f' g_0 \end{pmatrix}$ .

**3. 3.1.** On se place sur  $I = ]0, 1[$ . L'équation (e) s'écrit alors  $y'' + \frac{3}{t(t-1)}y' - \frac{6}{t(t-1)}y = \frac{20t^4}{t(t-1)}$ .

Posons alors  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{t(t-1)} & -\frac{3}{t(t-1)} \end{pmatrix}$  et  $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20t^3}{t-1} \end{pmatrix}$

On obtient alors l'équation matricielle (E) :  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ .

**3.2.** Notons alors  $f(t) = P(t)$  et  $g(t) = Q(t)$ .

$$\text{On a } \det W(u) = \begin{vmatrix} P(u) & Q(u) \\ P'(u) & Q'(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4u^3 + 3u^2 + 2u + 1 & \frac{1}{(1-u)^2} \\ 12u^2 + 6u + 2 & \frac{2}{(1-u)^3} \end{vmatrix}$$

$$\text{En calculant, } \det W(u) = \frac{2}{(1-u)^3} (4u^3 + 3u^2 + 2u + 1 - (1-u)(6u^2 + 3u + 1)) = \frac{20u^3}{(1-u)^3} \neq 0.$$

$$\text{Enfin, } Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{1}{(1-t)^2} (4u^3 + 3u^2 + 2u + 1) - \frac{1}{(1-u)^2} (4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)$$

$$Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{1}{(1-t)^2(1-u)^2} (4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4).$$

**3.3.** Appliquons tous les résultats vus précédemment .

Par II.4.3, on sait que  $X(t) = \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du$  est une solution particulière de (E).

En prenant la première coordonnée, on aura alors  $y(t)$  une solution particulière de (e).

$$\text{Calculons } R(t, u)B(u) = R(t, u) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20u^3}{u-1} \end{pmatrix}$$

Or, seule la première coordonnée de ce produit nous intéresse : écrivons donc  $R(t, u)$  sous la

$$\text{forme } R(t, u) = \begin{pmatrix} ? & * \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

Nous avons uniquement besoin de connaître \* :

D'après les questions précédents,

$$\begin{aligned} * &= \frac{Q(t)P(u) - P(t)Q(u)}{\det W(u)} = \frac{(1-u)^3}{20u^3} \frac{1}{(1-t)^2(1-u)^2} (4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4) \\ * &= \frac{(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4)(1-u)}{20u^3(1-t)^2}. \end{aligned}$$

Multiplions alors par  $B(u)$  et intégrons : on obtient

$$y(t) = \int_{t_0}^t \frac{(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4)(1-u)}{20u^3(1-t)^2} \frac{20u^3}{u-1} du$$

$$\text{donc } y(t) = \int_{t_0}^t \frac{-(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4)}{(1-t)^2} du = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$$

On obtient ainsi  $y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$ , solution particulière de (e).

Appliquons alors Chasles sur l'intégrale :

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du - \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$$

Calculons cette seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du &= \frac{1}{(1-t)^2} [4t^5 u - 5t^4 u - 4u^6/6 + u^5]_{u=0}^{u=t_0} \\ &= \frac{1}{(1-t)^2} [4t^5 t_0 - 5t^4 t_0 - 4t_0^6/6 + t_0^5]. \end{aligned}$$

Essayons alors de faire apparaître  $P$  et  $Q$ , les solutions de l'équation homogène :

$$\frac{1}{(1-t)^2} (4t^5 t_0 - 5t^4 t_0 - 4t_0^6/6 + t_0^5) = \frac{t_0}{(1-t)^2} (4t^5 - 5t^4) + Q(t) (-4t_0^6/6 + t_0^5)$$

Effectuons la division euclidienne de  $4t^5 - 5t^4$  par  $(1-t)^2$  :

$$4t^5 - 5t^4 = (4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)(1-t)^2 - 1$$

$$\text{d'où } \frac{4t^5 - 5t^4}{(1-t)^2} = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 - \frac{1}{(1-t)^2} = P(t) - Q(t).$$

Au final,  $\frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du = t_0(P(t) - Q(t)) + (-4t_0^6/6 + t_0^5)Q(t)$  : c'est donc une solution de l'équation homogène car combinaison linéaire des fonctions  $P$  et  $Q$ .

On en déduit que  $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$  est une solution particulière de (e).

$$\text{Calculons alors cette intégrale : } y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} [4t^5 u - 5t^4 u - 4u^6/6 + u^5]_{u=0}^{u=t}.$$

$$\text{Elle vaut alors } y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} [4t^6 - 5t^5 - 4t^6/6 + t^5] = \frac{10t^6 - 12t^5}{3(1-t)^2}.$$

Donc  $y(t) = \frac{10t^6 - 12t^5}{3(1-t)^2} = \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2}$  est une solution particulière de (e).

En reprenant tout ce qui a été fait précédemment, on a une solution particulière de l'équation avec second membre ( $y$ ) et une base ( $P, Q$ ) de l'équation homogène.

Trouvons alors les solutions de (e) sur  $[0, 1[$  : on commence par se placer sur  $]0, 1[$ .

D'après le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2, les solutions de (e) sont les fonctions  $t \mapsto y(t) + \alpha P(t) + \beta Q(t)$  soit encore

$$t \mapsto \frac{10t^6 - 12t^5}{3(1-t)^2} + \alpha(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) + \beta \frac{1}{(1-t)^2}$$

De plus, de telles fonctions se prolongent naturellement en fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1[$ .

Elles sont solutions de (e) sur  $]0, 1[$ . Il reste à voir ce qui se passe en 0.

L'équation (e) devient en 0,  $3y'(0) - 6y(0) = 0$ .

On a déjà  $y(0) = \alpha + \beta$ .

De plus,  $y'(t) = \frac{(120t^5 - 120t^4)(1-t)^2 + 2(20t^6 - 24t^5)(1-t)}{6(1-t)^4} + \alpha(12t^2 + 6t + 2) + \beta \frac{2}{(1-t)^3}$ ,

donc  $y'(0) = 2\alpha + 2\beta = 0$  : la relation  $3y'(0) - 6y(0) = 0$  est vérifiée et donc les fonctions précédentes sont bien solutions sur  $[0, 1[$  tout entier.

En conclusion,

les solutions de (e) sur  $[0, 1[$  sont les  $t \mapsto \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + \alpha(1+2t+3t^2+4t^3) + \beta \frac{1}{(1-t)^2}$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Enfin, ajoutons la condition initiale  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$  :

$y(0) = 0$  donne  $\alpha + \beta = 0$ .

On a vu ci-dessus que  $y'(0) = 2\alpha + 2\beta = 0$  soit encore  $\alpha + \beta = 0$ .

Les solutions de (e) sur  $[0, 1[$  vérifiant la condition initiale demandée sont donc les fonctions

$$t \mapsto \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + \alpha \left[ (1+2t+3t^2+4t^3) - \frac{1}{(1-t)^2} \right] \text{ avec } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}.$$

soit encore  $t \mapsto \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + \alpha \frac{4t^5-5t^4}{(1-t)^2}$  avec  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .