

Correction

Partie I

1. $G(u, v) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2 \geq 0$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Il y a égalité ssi u et v sont colinéaires.
- 2.a Si $w \in \{u, v\}^\perp$ alors $G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & 0 \\ (v|u) & (v|v) & 0 \\ 0 & 0 & (w|w) \end{vmatrix} = G(u, v) \|w\|^2$.
- 2.b Si $w = \lambda u + \mu v$ alors en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de $\text{Gram}(u, v, w)$ on a $C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2$ donc $G(u, v, w) = 0$.
- 2.c
$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (w|t) & (w|t) & (n|n) + (t|t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & 0 \\ (v|u) & (v|v) & 0 \\ (w|t) & (w|t) & (n|n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (w|t) & (w|t) & (t|t) \end{vmatrix}$$
$$= G(u, v) \|n\|^2 + G(u, v, t) = G(u, v) \|n\|^2$$
- 2.d Si (u, v, w) est libre alors (u, v) est libre et $w \notin \text{Vect}(u, v)$ donc $G(u, v) \neq 0$ et $n \neq 0$ puis $G(u, v, w) = G(u, v) \|n\|^2 \neq 0$.
Si $G(u, v, w) = 0$ alors $G(u, v) = 0$ ou $n = 0$ donc (u, v) liée ou $w \in \text{Vect}(u, v)$ puis (u, v, w) libre.

Partie II

1. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$.
Si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ telle que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ et par suite $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$ et donc $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.
- 2.a $u_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k$ donc $(u_i | u_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k \mid \sum_{\ell=1}^n a_{\ell,j} e_\ell \right) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$.
- 2.b $A = (a_{i,j}), {}^t A = (a'_{j,i})$ avec $a'_{j,i} = a_{i,j}$. ${}^t A A = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a'_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (u_i | u_j)$ donc ${}^t A A = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$. $G(u_1, \dots, u_n) = \det {}^t A A = (\det A)^2 > 0$ car A est inversible.
- 3.a $\forall y \in F, \|x - y\|^2 = \|x - x_F + x_F - y\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F - y\|^2$ car $x - x_F = n \in F^\perp$ et $x_F - y \in F$.
Par suite $\|x - y\|^2 \geq \|x - x_F\|^2$ et donc $d(x, F) \geq \|x - x_F\| = \|n\|$.
De plus pour $y = x_F \in F, \|x - y\| = \|n\|$ donc $d(x, F) \leq \|n\|$ et finalement $d(x, F) = \|n\|$.
- 3.b En décomposant la dernière colonne :
$$G(e_1, \dots, e_p, x) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \dots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \dots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \dots & (x_F | e_p) & (x_F | x_F) + \|n\|^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \dots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \dots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \dots & (x_F | e_p) & (x_F | x_F) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \dots & (e_1 | e_p) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \dots & (e_p | e_p) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \|n\|^2 \end{vmatrix}$$
$$= G(e_1, \dots, e_p, x_F) + \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p) = 0 + \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p) = \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p)$$

donc $d(x, F) = \|n\| = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$.