

Déterminant de Gram

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$

Partie I

1. Soit u et v deux vecteurs quelconques de E .
On note $Gram(u, v) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{pmatrix}$ et $G(u, v) = \det(Gram(u, v))$.
Montrer que $G(u, v) \geq 0$. A quelle condition y a-t-il égalité ?
2. Soit u, v et w trois vecteurs quelconques de E .
On note $Gram(u, v, w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix}$ et $G(u, v, w) = \det(Gram(u, v, w))$.
 - 2.a On suppose que w est orthogonal à u et v .
Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.
 - 2.b On suppose que w est combinaison linéaire de u et v .
Calculer $G(u, v, w)$.
 - 2.c On suppose que $w = t + n$ avec t combinaison linéaire de u et v , et n orthogonal à u et v .
Montrer que $G(u, v, w) = G(u, v) \|n\|^2$.
 - 2.d Etablir l'équivalence : (u, v, w) est libre $\Leftrightarrow G(u, v, w) \neq 0$.

Partie II

Soit $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs de E .

On note : $Gram(u_1, \dots, u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indice (i, j) est $(u_i | u_j)$ et $G(u_1, \dots, u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.
2. On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ libre. On introduit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$ et on note $A = (a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(u_1, \dots, u_n)$.
 - 2.a Exprimer $(u_i | u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice A .
 - 2.b Montrer que $Gram(u_1, \dots, u_n) = {}^t A A$. En déduire que $G(u_1, \dots, u_n) > 0$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F .
On appelle distance de x vecteur de E au sous-espace vectoriel F le réel : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
 - 3.a En écrivant $x = x_F + n$ avec $x_F \in F$ et $n \in F^\perp$, démontrer que $d(x, F) = \|n\|$.
 - 3.b Etablir : $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$.

Partie III

1. Pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.