

I QUELQUES EXEMPLES

Q1 a) Posons $A = (a_{ij})$. $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 1$ et $\forall (i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2$, $a_{ij} = 0$ si $(i,j) \notin \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$.

Posons $\sigma(1)=3, \sigma(2)=1$ et $\sigma(3)=2$.

σ est une bijection de $\llbracket 1,3 \rrbracket$ sur $\llbracket 1,3 \rrbracket$. et $\forall (i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$.

Ainsi $\sigma \in S_3$ et $A = P_\sigma$.

A est une matrice de permutation et la permutation correspondante est définie par : $\begin{cases} \sigma(1)=3 \\ \sigma(2)=1 \\ \sigma(3)=2 \end{cases}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Cherchons $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \mid AX = \lambda X\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ x = \lambda^3 x \end{cases}$$

1^{er} cas... $\lambda^3 \neq 1$. $AX = \lambda X \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow X = 0$. λ n'est pas valeur propre de A .

2^{es} cas... $\lambda^3 = 1$. $AX = \lambda X \Leftrightarrow y = \lambda x$ et $z = \lambda^2 x$.

$$\text{Alors } \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ et } \text{SEP}(A, \lambda) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} x \\ \lambda x \\ \lambda^2 x \end{pmatrix} \right).$$

Notons que l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^3 = 1$ admet trois solutions $1, j$ et j^2 .

Ainsi $\text{Sp}_\mathbb{C}(A) = \{1, j, j^2\}$. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et A admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

Ainsi : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{SEP}(A, 1)$, $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{SEP}(A, j)$ et

$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{SEP}(A, j^2)$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) = \text{SEP}(A, 1) \oplus \text{SEP}(A, j) \oplus \text{SEP}(A, j^2)$.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A

respectivement associés aux valeurs propres $1, j$ et j^2 . Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à $\hat{\mathcal{B}}$. Alors :

$$P \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}. \text{ Remarque : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

Q2 a) Pour $A = (a_{ij})$. $\forall (i,j) \in \llbracket 3, 4 \rrbracket^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in \{(3,1), (4,2), (1,3), (2,4)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $\sigma(1)=3, \sigma(2)=4, \sigma(3)=1$ et $\sigma(4)=2$.

σ est une bijection de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $\forall (i,j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$

Ainsi $\sigma \in S_4$ et $P_\sigma = A$.

A est une matrice de permutation et la permutation σ correspondante est définie par :

$$\begin{cases} \sigma(1) = 3 \\ \sigma(2) = 4 \\ \sigma(3) = 1 \\ \sigma(4) = 2 \end{cases}$$

b) Un calcul simple donne $A^2 = I_4$.

$\lambda^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A dont les racines dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (!) sont $\{-1, 1\}$.

Alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{-1, 1\}$. Reste à voir si -1 et 1 sont des valeurs propres de A .

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \Pi_{4,1}(\mathbb{R})$. $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \\ x = z \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow x - z = 0 \text{ et } y - t = 0$.

Ainsi $1 \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $SEP(A, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ x = -z \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow x + z = 0 \text{ et } y + t = 0$. $-1 \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $SEP(A, -1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-1, 1\}$; $SEP(A, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $SEP(A, -1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Remarque... $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ sont clairement des familles libres de

$\Pi_{4,1}(\mathbb{R})$. Ainsi B_1 est une base de $SEP(A, 1)$ et B_2 est une base de $SEP(A, -1)$.

Alors $\dim SEP(A, 1) + \dim SEP(A, -1) = 2 + 2 = 4$. A est diagonalisable.

Comme $SEP(A, 1) \oplus SEP(A, -1) = \Pi_{4,1}(\mathbb{R})$, $\hat{B} = B_1 \cup B_2$ est une base de $\Pi_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée

de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, -1, -1$.
 soit P la matrice de passage de la base canonique de $\pi_{4,1}(\mathbb{R})$ à $\widehat{B}$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Q3) a) $P_\sigma = (p_{ij})$, $\forall (i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{si } \sigma(j) \neq i \end{cases}$

$$\sigma(1)=1, \sigma(2)=3, \sigma(3)=4, \sigma(4)=2. \quad p_{2,3} = p_{3,2} = p_{4,3} = p_{3,4} = 1 \quad \text{et}$$

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket^2 - \{(2,1), (3,1), (4,3), (1,4)\}, \quad p_{ij} = 0$$

Ainsi $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

b)

$$P_\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \underline{P_\sigma^4 = I_4}. \quad \text{Noter que } P_\sigma^2 \text{ est la matrice de } \sigma^2.$$

de P_σ

c) $x^4 - 1$ est un polynôme annulateur d'at les zéros dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) sont 1 et -1 (resp. $1, -i, i, -1$). $\underline{Sp_{\mathbb{R}}(P_\sigma) \subset \{1, -1\}}$ (resp. $Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \{1, -1, i, -i\}$).

Regardons si 1 et -1 ont des valeurs propres de P_σ . Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \pi_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$P_\sigma x = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t. \quad 1 \in Sp_{\mathbb{R}}(P_\sigma) \text{ et } \ker(P_\sigma - 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$P_\sigma x = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = z = -t. \quad -1 \in Sp_{\mathbb{R}}(P_\sigma) \text{ et } \ker(P_\sigma + 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

d) f_σ est l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est P_σ .

Pour montrer que P_σ est semblable à π il suffit de construire une base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de E telle que $\pi_{B'}(f_\sigma) = \pi$.

Analyse. Supposons $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ "idéale"

$$f_\sigma(e'_1) = e'_1, f_\sigma(e'_2) = -e'_2, f_\sigma(e'_3) = e'_4 \text{ et } f_\sigma(e'_4) = -e'_3.$$

Alors $e'_1 \in \text{SEP}(f_\sigma, 1) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $e'_2 \in \text{SEP}(f_\sigma, -1) = \text{Vect}(e_2 - e_1, e_3 - e_4)$.

Noter que $f_\sigma^2(e'_3) = f_\sigma(e'_4) = -e'_3$ et $e'_4 = f_\sigma(e'_3)$.

Avec e'_3 et dans $\text{SEP}(f_\sigma^2, -1) = \text{Vect}(e_3 - e_1, e_2 - e_4)$.

$\uparrow$
 P_σ^2 et la matrice A de Φ_2 !!

Synthèse. Posons $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $e'_2 = e_2 - e_1 + e_3 - e_4$, $e'_3 = e_1 - e_3$ et $e'_4 = f_\sigma(e'_3)$.

$$\bullet f_\sigma(e'_1) = e'_1 \quad \bullet f_\sigma(e'_2) = -e'_2 \quad \bullet f_\sigma(e'_3) = e'_4 \quad \bullet f_\sigma(e'_4) = f_\sigma^2(e'_3) = -e'_3.$$

Montrons que la famille $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E .

car $B' = 4 = \dim E$. Il suffit donc de prouver que B' est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4$ tel que: $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 + \delta e'_4 = 0_E$. Notons que $e'_4 = f_\sigma(e'_3) = e_2 - e_1$.

$$\alpha(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \beta(e_2 - e_1 + e_3 - e_4) + \gamma(e_1 - e_3) + \delta(e_2 - e_1) = 0_E$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \delta = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0 \quad (1)-(3) \\ \alpha + \beta = 0 \\ \delta = 0 \quad (1)-(4) \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right. ; \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Ceci achève de prouver que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E .

$$\text{A plus } \pi_{B'}(f_\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \pi.$$

Ainsi P_σ et π sont semblables.

Remarque. Soit P la matrice de passage de $\tilde{B}$ à B' .

$$P^{-1} P_{\sigma} P = \Pi, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

e) Nous avons $Sp_{\mathbb{C}}(P_{\sigma}) \subset \{1, -1, i, -i\}$, $1 \in Sp_{\mathbb{C}}(P_{\sigma})$, $-1 \in Sp_{\mathbb{C}}(P_{\sigma})$,

$$SEP(P_{\sigma}, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad SEP(P_{\sigma}, -1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \Pi_{4,1}(\mathbb{C}). \quad P_{\sigma} X = iX \Leftrightarrow \begin{cases} t = ix \\ y = iy \\ z = iz \\ t = it \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ix \\ z = it = -x \\ y = iz = -ix \\ x = i(-ix) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ix \\ z = -x \\ t = ix \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } i \in Sp_{\mathbb{C}}(P_{\sigma}) \quad \text{et} \quad SEP(P_{\sigma}, i) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Par conjugaison (!) } \quad \underline{\underline{-i \in Sp_{\mathbb{C}}(P_{\sigma}) \quad \text{et} \quad SEP(P_{\sigma}, -i) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \right).}}$$

Ainsi $\underline{\underline{Sp_{\mathbb{C}}(P_{\sigma}) = \{1, -1, i, -i\}}}$. $P_{\sigma} \in \Pi_4(\mathbb{C})$ et P_{σ} admet quatre valeurs propres distinctes ; P_{σ} est diagonalisable dans $\Pi_4(\mathbb{C})$.

Il est à noter que $\tilde{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\Pi_{4,1}(\mathbb{C})$

constituée de vecteurs propres de P_{σ} respectivement associés à $1, -1, i, -i$

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\Pi_{4,1}(\mathbb{C})$ à $\tilde{B}$.

$$P^{-1} P_{\sigma} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -i \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

II UN PEU DE GÉNÉRALITÉS

Q-1) voir Q1 ! ($P_\sigma = P_{\sigma^{-1}} \Rightarrow \sigma = \sigma^{-1}!!$)

Q0) Supposons que σ est la permutation identité. $\forall j \in [1, n], \sigma(j) = j$.

Ainsi $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $P_\sigma = I_n$.

si σ est la permutation identité: $P_\sigma = I_n$.

Q1) Pour $\forall \sigma \in S_n$, $\varphi(\sigma) = P_\sigma$. φ est une application de S_n dans S_n et par définition de S_n elle est surjective. Montrons que φ est injective.

Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$ tel que $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma')$. $P_\sigma = P_{\sigma'}$. Montrons que $\sigma = \sigma'$.

Pour $P_\sigma = (P_{ij})$ et $P_{\sigma'} = (P'_{ij})$. $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $P_{ij} = P'_{ij}$.

Soit $j \in [1, n]$. Pour $i = \sigma(j)$, $P_{ij} = 1$ donc $P'_{ij} = 1$ alors nécessairement

$\sigma'(j) = i = \sigma(j)$. $\forall j \in [1, n], \sigma(j) = \sigma'(j)$. $\sigma = \sigma'$.

Ceci achève de montrer l'injectivité de φ .

Ainsi φ est une bijection de S_n sur S_n ; S_n et S_n sont équipotents!

S_n est alors fini et card $S_n = \text{card } S_n = n!$. card $S_n = n!$

Q2) a) Soit $j \in [1, n]$. $f_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^n P_{ij} e_i = e_{\sigma(j)}$.
 $P_{ij} = 1 \iff \sigma(j) = i$

$\forall j \in [1, n], f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

b) Notons f l'endomorphisme de E de matrice A dans B .

AP_σ est la matrice dans B de $f \circ f_\sigma$.

c) $\forall j \in [1, n], (f \circ f_\sigma)(e_j) = f(f_\sigma(e_j)) = f(e_{\sigma(j)})$.

Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de AP_σ est la $\sigma(j)^{\text{ème}}$ colonne de A , pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour conséquent AP_σ se déduit de A en opérant la permutation σ sur les indices des colonnes de A .

Exercice... Étudier le produit $P_\sigma A$.

(Q3) Noter que $P_\sigma, P_\sigma = P_{\sigma^{-1} \circ \sigma}$ revient à prouver que $f_\sigma \circ f_\sigma = f_{\sigma^{-1} \circ \sigma}$.
Comme $B = (e_1, \dots, e_n)^{\text{atue base de } F}$ pour établir cette égalité il suffit de prouver que:

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (f_\sigma \circ f_\sigma)(e_j) = f_{\sigma^{-1} \circ \sigma}(e_j).$$

$$\text{Or } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (f_\sigma \circ f_\sigma)(e_j) = f_\sigma(f_\sigma(e_j)) = f_\sigma(e_{\sigma(j)}) = e_{\sigma^{-1}(\sigma(j))} = e_{(\sigma^{-1} \circ \sigma)(j)} = f_{\sigma^{-1} \circ \sigma}(e_j).$$

Ainsi $P_\sigma, P_\sigma = P_{\sigma^{-1} \circ \sigma}$.

(Q4) Noter σ_0 la permutation identité. D'après Q3: $P_{\sigma_0} = I_n$.

Ainsi $I_n = P_{\sigma_0} = P_{\sigma^{-1} \circ \sigma} = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma$

Ceci suffit largement pour dire que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Pour $P_\sigma^{-1} = (q_{ij})$; $P_{\sigma^{-1}} = (q_{ij})$;

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma^{-1}(j) \text{ ou } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma^{-1}(j) \text{ ou } j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

Pour ${}^t P_\sigma = (r_{ij})$.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, r_{ij} = P_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{si } j \neq \sigma(i) \end{cases}; \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, r_{ij} = q_{ij}.$$

Ainsi $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^t P_\sigma$.

(Q5) a) Une récurrence simple dans $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_\sigma^k = P_\sigma k$ (Q3!).

Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Posons $k' = -k$, $k' \in \mathbb{N}^*$,

P_σ est inversible donc $P_\sigma^{k'}$ est égalant (produit de matrices inversibles).

$$P_\sigma^k = P_\sigma^{-k'} = (P_\sigma^{-1})^{k'} = (P_{\sigma^{-1}})^{k'} = P_{(\sigma^{-1})^{k'}} = P_{\sigma^{-k'}} = P_\sigma k.$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_\sigma^k = P_\sigma k$.

Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, P_σ^k est la matrice de permutation $P_\sigma k$.

b) $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n!}\}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ et card $\mathcal{S}_n = n!$
[factuel!]

Alors card $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n!}\} \leq n!$

Nécessairement deux éléments, du moins, de la famille $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n!})$ sont égaux. $\exists (q, q') \in \llbracket 0, n! \rrbracket^2$, $\sigma^q = \sigma^{q'}$ et $q \neq q'$.

Ainsi il existe deux éléments distincts q et q' de $\mathbb{N}$ tels que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$.

c) Soit $(q, q') \in \mathbb{N}^2$ tel que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$ et $q \neq q'$.

$$P_\sigma q = P_\sigma q' ; \sigma^q = \sigma^{q'}.$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas. } q > q' . \sigma^q \circ \sigma^{-q'} = \sigma^{q'} \circ \sigma^{-q'} = \sigma_0 ; \sigma^{q-q'} = \sigma_0 .$$

$$\text{Posons } r = q - q' . r \in \mathbb{N}^* \text{ et } P_\sigma^r = P_\sigma r = P_{\sigma_0} = I_n .$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas. } q < q' . \text{ De la même manière en posant } r = q' - q \text{ on a } r \in \mathbb{N}^* \text{ et } P_\sigma^r = I_n .$$

$$\text{Ainsi : } \underline{\underline{\exists r \in \mathbb{N}^*, P_\sigma^r = I_n .}}$$

d) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_\sigma^r = I_n$. $X^r - 1$ est un polynôme annulateur de P_σ .

$$\text{Soit } \lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(P_\sigma) . \lambda^r - 1 = 0 . \lambda^r = 1 . |\lambda|^r = 1 . |\lambda| = 1 \text{ (} r \in \mathbb{N}^* \text{)} .$$

Ainsi toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de P_σ ont pour module 1.

$$\subseteq \text{P.S. de } U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})!). \quad U \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$\text{P.S. de } V = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = P_\sigma U. \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \times 1 = \underset{\uparrow}{p_{i, \sigma^{-1}(i)}} = 1; \quad V = U.$$

$$p_{ij} = 1 \text{ si } \sigma(j) = i \text{ ou } j = \sigma^{-1}(i)$$

Alors $U \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et $P_\sigma U = U$.

1 est valeur propre de P_σ .

$$(Q6) \ a) \quad B P_\sigma = P_\sigma B \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n b_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^n p_{ik} b_{kj}$$

$$\underline{B P_\sigma = P_\sigma B \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{i, \sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i), j} =}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \sigma(j) \\ 1 & \text{si } k = \sigma(j) \end{cases} \\ p_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \sigma(k) \text{ ou } k \neq \sigma^{-1}(i) \\ 1 & \text{si } i = \sigma(k) \text{ ou } k = \sigma^{-1}(i) \end{cases} \end{array} \right.$$

b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrons que : $m_{i, \sigma(j)} = m_{\sigma^{-1}(i), j}$.

1^{er} cas... $\sigma(j) \neq i$. Alors $\sigma^{-1}(i) \neq j$.

$$\text{Ainsi } m_{i, \sigma(j)} = \beta = m_{\sigma^{-1}(i), j} \quad ; \quad m_{i, \sigma(j)} = m_{\sigma^{-1}(i), j}$$

2nd cas... $\sigma(j) = i$. Alors $\sigma^{-1}(i) = j$.

$$m_{i, \sigma(j)} = m_{ii} = \alpha = m_{jj} = m_{\sigma^{-1}(i), j} \quad ; \quad m_{i, \sigma(j)} = m_{\sigma^{-1}(i), j}$$

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i, \sigma(j)} = m_{\sigma^{-1}(i), j}. \quad \text{Ainsi } \Pi(\alpha, \beta) P_\sigma = P_\sigma \Pi(\alpha, \beta).$$

$$\text{Rien que } \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \Pi(\alpha, \beta) P_\sigma = P_\sigma \Pi(\alpha, \beta). \quad \underline{\underline{\Pi(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}}}$$

c) Réciproquement, soit $B = (b_{ij})$ un élément de $\mathcal{L}$. $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $B P_\sigma = P_\sigma B$.

$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{i\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)j}$. Posons $\alpha = b_{11}$ et $\beta = b_{12}$.

• Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Considérons un élément σ de $\mathcal{S}_n$ tel que $\sigma(1) = i$ (ex: $\sigma(1) = i, \sigma(i) = 1, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{1, i\}, \sigma(k) = k$).

Alors $b_{ii} = b_{i\sigma(1)} = b_{\sigma^{-1}(i)1} \underset{\sigma^{-1}(i)=1}{=} b_{11} = \alpha$.

Finalement $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{ii} = \alpha$.

• Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

considérons un élément σ de $\mathcal{S}_n$ tel que: $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$
(il en existe au moins une car $1 \neq 2$ et $i \neq j$).

Alors $b_{ij} = b_{i\sigma(2)} = b_{\sigma^{-1}(i)2} = b_{12} = \beta$.

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow b_{ij} = \beta$. Ainsi $B = \pi(\alpha, \beta)$.

Pour conclure si $B \in \mathcal{L}$, $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, B = \pi(\alpha, \beta)$.

Ainsi $\mathcal{L} = \{\pi(\alpha, \beta); (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

conclusion.. $\mathcal{L} = \{\pi(\alpha, \beta); (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

(Q7) a) Fixons j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$

Dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de P_σ le terme $P_{\sigma(j)j}$ vaut 1 et les autres sont nuls.

Dans chaque colonne de P_σ , il y a un 1 et les autres coefficients sont nuls.

Fixons i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \text{ ou } j = \sigma^{-1}(i) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \text{ ou } j \neq \sigma^{-1}(i) \end{cases}$

Dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de P_σ le terme $P_{i\sigma^{-1}(i)}$ vaut 1 et les autres sont nuls.

Dans chaque ligne de P_σ , il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.

c) Réciproquement σ_0 la permutation identité de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ici $P_\sigma \neq I_n = P_{\sigma_0}$.

Ainsi $\sigma \neq \sigma_0$. Alors $\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(j) \neq j$.

Alors $P_{jj} = 0$ car $j \neq \sigma(j)$. Posons $i = \sigma(j)$. $i \neq j$.

Réciproquement $\sigma(i) \neq i$ ($\sigma(i) = i \Rightarrow \sigma(i) = \sigma(j) \Rightarrow i = j$!!). Alors $P_{ii} = 0$.

Ainsi $P_{ii} = P_{jj} = 0$ avec $i \neq j$.

$$\text{Tr}(P_\sigma) = \sum_{k=1}^n P_{kk} = \sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{i, j\}} P_{kk} \leq n-2 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(P_\sigma) = \sum_{k=1}^n P_{kk} \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

$\uparrow$ $P_{kk} \in \{0, 1\}$

Si $P_\sigma \neq I_n$, $\text{Tr}(P_\sigma) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

d) Supposons que $\text{Tr}(P_\sigma) = n-2$.

Alors $\sum_{k=1}^n P_{kk} = n-2$. Comme $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_{kk} \in \{0, 1\}$:

$\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, $P_{ii} = P_{jj} = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{i, j\}$, $P_{kk} = 1$.

Alors réciproquement $\sigma(i) \neq i$, $\sigma(j) \neq j$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{i, j\}$, $\sigma(k) = k$.

Alors $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$ avec $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$.

Finalement $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{i, j\}$, $\sigma(k) = k$.

Ainsi σ est une TRANSPOSITION (elle échange deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et laisse fixe les autres).

Réciproquement supposons que σ est une transposition. $\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{i, j\}$, $\sigma(k) = k$.

Alors $P_{ii} = 0$ ($\sigma(i) \neq i$), $P_{jj} = 0$ ($\sigma(j) \neq j$), $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{i, j\}$, $P_{kk} = 1$ ($\sigma(k) = k$).

Ainsi $\text{Tr}(P_\sigma) = n-2 \Leftrightarrow \sigma$ est une transposition.

c) Soit σ' une seconde permutation. Supposons que $\text{Tr}(P_\sigma) = \text{Tr}(P_{\sigma'}) = n-2$.

Alors σ et σ' sont deux transpositions de $[1, n]$.

$\exists (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j$ tel que: $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$ et $\forall k \in [1, n] - \{i, j\}, \sigma(k) = k$.

$\exists (i', j') \in [1, n]^2, i' \neq j'$ tel que $\sigma'(i') = j', \sigma'(j') = i'$ et $\forall k \in [1, n] - \{i', j'\}, \sigma'(k) = k$.

$i \neq j$ et $i' \neq j'$; on peut donc trouver une permutation σ'' de $[1, n]$ telle que: $\sigma''(i) = i'$ et $\sigma''(j) = j'$.

notons que $\sigma = \sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma''$

$$(\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'')(k) = \sigma''^{-1}(\sigma'(i')) = \sigma''^{-1}(j') = j = \sigma(i).$$

$$(\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'')(j) = \sigma''^{-1}(\sigma'(j')) = \sigma''^{-1}(i') = i = \sigma(j)$$

soit $k \in [1, n] - \{i, j\}$.

$$\sigma''(k) \notin \{i', j'\} \text{ d'ac } \sigma'(\sigma''(k)) = \sigma''(k), \text{ d'ac } (\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'')(k) = \sigma''^{-1}(\sigma''(k)) = k = \sigma(k).$$

Finalement $\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma''$ et σ coïncident à tout point de $[1, n]$.

$$\text{Ainsi } \sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'' = \sigma$$

$$\text{Alors } P_\sigma = P_{\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma''} = P_{\sigma''^{-1}} P_{\sigma'} P_{\sigma''} = (P_{\sigma''})^{-1} P_{\sigma'} P_{\sigma''}$$

Par conséquent: P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.