

Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes P_n et L_n de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n = (X^2 - 1)^n, \quad L_n = P_n^{(n)}$$

Les polynômes L_n sont appelés les *polynômes de Legendre*.

1. Degré, coefficient dominant et parité
 - a. Expliciter L_0 , L_1 et L_2 .
 - b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré, ainsi que le coefficient dominant du polynôme L_n .
 - c. Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier la parité de L_n . (on dit qu'un polynôme est pair quand il est conservé par substitution de X par $-X$ et qu'il est impair quand il est changé en son opposé)
2. Valeurs de $L_n(1)$ et de $L_n(-1)$.
 - a. A l'aide de la formule de Leibniz, donner, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n sous forme d'une somme de polynômes.
 - b. En déduire les valeurs de $L_n(1)$ et de $L_n(-1)$.
3. Racines de L_n
 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$, déterminer les valeurs de $P_n^{(k)}(-1)$ et $P_n^{(k)}(1)$.
 - b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$.
4. Relation entre les polynômes de Legendre
 - a. Former une relation entre P'_{n+1} et P_n pour $n \in \mathbb{N}$, puis une relation entre P''_{n+1} , P_n et P_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - b. A l'aide de ces deux relations, déterminer une relation liant L_{n+2} , L_{n+1} et L_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

1.
 - a. On obtient $L_0 = 1$, $L_1 = 2X$, $L_2 = 12X^2 - 4$.
 - b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le terme dominant de P_n est X^{2n} . Le terme dominant de $L_n = P_n^{(n)}$ est donc $\frac{(2n)!}{n!} X^n$. Donc L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!}$.
 - c. On vérifie que le polynôme dérivé d'un polynôme pair est impair et que le polynôme dérivé d'un polynôme impair est pair.
Or P_n est pair, L_n est la dérivée n ème d'un polynôme pair. D'après la remarque précédente, L_n a donc même parité que n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Comme $P_n = (X-1)^n(X+1)^n$, la formule de Leibniz conduit à

$$L_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k (X-1)^n D^{n-k} (X+1)^n$$

- b. Comme 1 est racine de $(X-1)^n$ de multiplicité n , pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $D^k (X-1)^n(1) = 0$. D'où $L_n(1) = \binom{n}{n} D^n (X-1)^n D^0 (X+1)^n = 2^n n!$. D'après la parité de L_n , on en déduit que $L_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$.
3.
 - a. Il est clair d'après la définition de la multiplicité d'une racine en termes de divisibilité que 1 et -1 sont des racines de P_n de multiplicité n . D'après un résultat de cours ceci entraîne que 1 et -1 sont aussi des racines des dérivées de P_n jusqu'à l'ordre $n-1$.
 - b. Démontrons par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que le polynôme $P_n^{(k)}$ à, au moins, k racines distinctes dans $] -1, 1[$.
Le résultat est évident au rang 0. Supposons le résultat vrai au rang k , pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Considérons $x_1, \dots, x_k$, k racines de $P_n^{(k)}$ telles que $-1 < x_1 < \dots < x_k < 1$. Par la question précédente on a de plus $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction polynomiale $P_n^{(k)}$ sur chaque segment $[-1, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_k, 1]$, on montre que $P_n^{(k+1)}$ admet au moins $k+1$ racines distinctes sur $] -1, 1[$.
On en déduit donc que L_n admet au moins n racines distinctes sur $] -1, 1[$, or L_n est de degré n , il est donc scindé à racines simples et toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$.
4.
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant une fois $P_{n+1} = (X-1)^{n+1}(X+1)^{n+1}$, on obtient

$$P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n \quad (\alpha)$$

Pour $n \geq 1$, on dérive la relation précédente, on trouve

$$P''_{n+1} = 2(n+1)(P_n + XP'_n)$$

on remplace dans cette expression P'_n par $2nXP_{n-1}$ puis on exprime le terme en X^P_{n-1} à l'aide de P_n . On obtient

$$\begin{aligned} P''_{n+1} &= 2(n+1)(P_n + 2nX^2P_{n-1}) \\ &= 2(n+1)(P_n + 2n(X^2 - 1)P_{n-1} + 2nP_{n-1}) \\ &= 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1} \quad (\beta) \end{aligned}$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive n fois (α) , en utilisant la formule de Leibniz. Comme $D^k X = 0$ pour $k \geq 2$, on obtient :

$$L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)} \quad (1)$$

Dérivons maintenant $n-1$ fois (β) , on trouve

$$L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{(n-1)} \quad (2)$$

En éliminant $P_n^{(n-1)}$ à l'aide de (1) et (2), on trouve

$$L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}$$