

## Corrigé.

Q 1

1. Unicité : considérons deux polynômes  $B_1$  et  $B_2$  vérifiant ces deux relations. Puisque  $B'_1 = B'_2$ , il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, B_1(x) = B_2(x) + C$ . En intégrant entre 0 et 1, on trouve que  $C = 0$  et donc que  $B_1 = B_2$ .
2. Existence : si  $A$  est le polynôme nul, il suffit de poser  $B = 0$ . Si le polynôme  $A$  n'est pas nul, il s'écrit  $A = a_p X^p + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ . Posons alors  $B = \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + C$  où  $C$  est une constante. Le polynôme  $B$  vérifie  $B' = A$ . Pour qu'en plus, on ait  $\int_0^1 B(t) dt = 0$ , il suffit de choisir  $C = -\sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$ . On trouve donc que le polynôme  $B$  est de degré  $p+1$ , et que son coefficient dominant vaut  $\frac{a_p}{p+1}$ .

Q 2

On démontre par récurrence sur  $n$  que le degré du polynôme  $B_n$  vaut  $n$  et qu'il est unitaire, en utilisant la question 1.

Q 3

Par récurrence sur  $n$ .

$$\mathcal{P}(n) : B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

$$\mathcal{P}(0) : B_0 = \binom{0}{0} b_0 = b_0 = B_0(0) = 1.$$

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) : \text{d'après } \mathcal{P}(n),$$

$$B'_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

En primitivant,

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1} X^{k+1} + C \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{n+1}{p} \binom{n}{p-1} b_{n+1-p} X^p + C \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} X^p + C \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement d'indice  $p = k+1$  et utilisé la relation  $\binom{n+1}{p} = \frac{n+1}{p} \binom{n}{p-1}$  pour  $1 \leq p \leq n+1$ .

Comme  $B_n(0) = C = b_{n+1}$ , on peut intégrer la constante à la somme et l'on obtient l'expression de  $B_{n+1}$  :

$$B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} b_{n+1-p} X^p$$

Q 4

- Puisque  $B'_1 = 1$ ,  $B_1 = X + b_1$  et comme  $\int_0^1 B_1(t) dt = 0$ , on trouve que  $b_1 = -1/2$ , puis que  $B_1 = X - 1/2$ .
- Puisque  $B'_2 = 2B_1$ ,  $B_2 = X^2 - X + b_2$  et puisque  $\int_0^1 B_2(t) dt = 0$ , on trouve que  $b_2 = 1/6$  et  $B_2 = X^2 - X + 1/6$ .
- Puisque  $B'_3 = 3B_2$ ,  $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + b_3$  et la condition  $\int_0^1 B_3(t) dt = 0$  donne  $b_3 = 0$  et  $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ .

Q 5

Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ .

$$\mathcal{P}(n) : B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$

$\mathcal{P}(0)$  est vérifiée clairement.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : Posons  $Q = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X)$ . Alors

$$Q'(X) = -(-1)^{n+1} B'_{n+1}(1-X) = (n+1)(-1)^n B_n(1-X) = (n+1)B_n(X) = B_{n+1}(X)$$

Par conséquent, il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $Q = B_n + C$ . Mais par le changement de variables  $u = 1-t$ ,

$$\int_0^1 Q(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(1-t) dt = -(-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du = 0$$

d'où  $C = 0$ , et donc  $Q = B_{n+1}$ .

**Q 6** Par récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : B_n = 2^{n-1} [B_n(X/2) + B_n((X+1)/2)]$$

$\mathcal{P}(0)$  est vérifiée.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : posons  $Q = 2^n [B_{n+1}(X/2) + B_{n+1}((X+1)/2)]$ . Calculons

$$\begin{aligned} Q' &= 2^n \left[ \frac{1}{2} B'_{n+1}(X/2) + \frac{1}{2} B_n((X+1)/2) \right] \\ &= (n+1) 2^{n-1} [B_n(X/2) + B_n((X+1)/2)] \\ &= (n+1) B_n(X) \\ &= B'_{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $Q = B_{n+1} + C$ . Mais en effectuant les changement de variables  $u = t/2$  et  $v = (t+1)/2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(t) dt &= 2^n \left[ \int_0^1 B_{n+1}(t/2) dt + \int_0^1 B_{n+1}((t+1)/2) dt \right] \\ &= 2^{n-1} \left[ \int_0^{1/2} B_{n+1}(u) du + \int_{1/2}^1 B_{n+1}(v) dv \right] \\ &= 2^{n-1} \int_0^1 B_{n+1}(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $C = 0$  et donc  $Q = B_{n+1}$ .

**Q 7** Soit  $p \geq 1$ . D'après la relation 3, avec  $n = 2p+1$  et en faisant  $x = 0$ , on trouve que

$$B_{2p+1}(0) = 2^{2p} [B_{2p+1}(0) + B_{2p+1}(1/2)]$$

D'après la relation 2, en faisant  $x = 1/2$ , on trouve que

$$B_{2p+1}(1/2) = -B_{2p+1}(1/2)$$

donc  $B_{2p+1}(1/2) = 0$  et donc  $B_{2p+1}(0) = b_{2p+1} = 0$ . En utilisant la relation 2, avec  $p = 2k$ , on obtient immédiatement que  $b_{2k} = B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ , et lorsque  $p = 2k+1$ , on trouve d'après la relation 2 que  $B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1}(0) = b_{2k+1} = 0$ . Dans tous les cas,  $B_p(1) = B_p(0)$ .

**Q 8** D'après la question précédente,  $B_{2p+2}(1) = (-1)^{2p+2} B_{2p+2}(0) = b_{2p+2}$ .

En utilisant ensuite la relation 1 avec  $x = 1$ , et la symétrie des coefficients binômiaux :

$$\begin{aligned} B_{2p+2}(1) &= \sum_{k=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{k} b_{2p+2-k} \\ &= \sum_{i=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{i} b_i \quad (i = 2p+2-k) \end{aligned}$$

En sortant de la somme les termes correspondant aux indices  $i = 2p - 1, 2p, 2p + 1, 2p + 2$ , on trouve que

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i + \binom{2p+2}{2p-1} b_{2p-1} + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + \binom{2p+2}{2p+1} b_{2p+1} + \binom{2p+2}{2p+2} b_{2p+2} \\ &= \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + b_{2p+2} \end{aligned}$$

En effet, les nombres  $b_{2p-1}$  et  $b_{2p+1}$  sont nuls d'après la question précédente. Les nombres  $b_{2p+2}$  s'éliminent et puisque  $\binom{2p+2}{2p} = \binom{2p+2}{2} = (p+1)(2p+1)$ , on en tire le résultat de l'énoncé.

**Q 9** De la formule précédente, on tire  $b_4 = -\frac{1}{30}$ .

**Q 10** Par récurrence sur  $n$  :

$$\mathcal{P}(n) : B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

$\mathcal{P}(1)$  : Puisque  $B_1(X) = X - 1/2$ ,  $B_1(X+1) - B_1(X) = 1$ .

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : D'après  $\mathcal{P}(n)$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Intégrons la relation précédente entre 0 et  $x$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x B_n(t+1) dt - \int_0^x B_n(t) dt &= n \int_0^x t^{n-1} dt \\ \int_1^{x+1} B_n(u) du - \int_0^x B_n(u) du &= x^n \quad (u = t+1) \\ \int_x^{x+1} B_n(t) dt &= x^n \quad (\text{Chasles}) \\ \left[ \frac{1}{n+1} B_{n+1}(t) \right]_x^{x+1} &= x^n \quad (B'_{n+1} = (n+1)B_n) \\ B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= (n+1)x^n \end{aligned}$$

et puisque cette relation est vraie pour tout réel  $x$ , on en déduit l'égalité entre polynômes.

**Q 11** Écrivons :

$$\begin{aligned} \sin[(2n+1)a] &= \frac{e^{i(2n+1)a} - e^{-i(2n+1)a}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} [(\cos a + i \sin a)^{2n+1} - (\cos a - i \sin a)^{2n+1}] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k (1 - (-1)^k) \sin^k a \cos^{2n+1-k} a \right] \\ &= \frac{1}{i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k a \cos^{2n+1-k} a \\ &= \frac{1}{i} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} \sin^{2p+1} a \cos^{2(n-p)} a \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} a \cos^{2(n-p)} a \end{aligned}$$