

MPSI 2 : DL 5

Pour le 30 janvier 2003

1 Nombres de Bernoulli

On note E le $\mathbb{R}$ -e.v. des polynômes à coefficients réels, et pour $n \in \mathbb{N}$, E_n le $\mathbb{R}$ -e.v. des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On notera indifféremment P pour désigner le polynôme ou la fonction polynômiale associée.

Q 1 On considère un polynôme $A \in E$ de degré $p \geq 0$, et de coefficient dominant a_p . Montrer qu'il existe un unique polynôme $B \in E$ vérifiant :

1. $B' = A$;
2. $\int_0^1 B(t) dt = 0$.

On précisera le degré et le coefficient dominant de B en fonction de p et de a_p .

On peut donc définir par récurrence la suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

1. $B_0 = 1$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0$.

Q 2 Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant du polynôme B_n .

Les polynômes B_n s'appellent les *polynômes de Bernoulli*. On définit ensuite les *nombres de Bernoulli* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = B_n(0)$$

Q 3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k \quad (1)$$

Q 4 Expliciter les polynômes B_1 , B_2 et B_3 , ainsi que les nombres b_1 , b_2 et b_3 .

Q 5 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X) \quad (2)$$

On pourra calculer la dérivée du polynôme $Q = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1 - X)$ et calculer $\int_0^1 Q(t) dt$.

Q 6 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(X) = 2^{n-1} \left[B_n(X/2) + B_n((X+1)/2) \right] \quad (3)$$

Q 7 Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{2p+1} = 0$ et que $\forall p \geq 2$, $B_p(1) = B_p(0) = b_p$.

Q 8 Montrer successivement que $\forall p \geq 2$,

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \sum_{i=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{i} b_i \\ b_{2p} &= -\frac{1}{(p+1)(2p+1)} \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i \end{aligned} \quad (4)$$

Q 9 Calculer b_4 en utilisant la formule 4.

Q 10 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

2 Calcul de $\zeta(2)$

Q 11 Soit un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \notin \pi\mathbb{Z}$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a}$ sous la forme d'un polynôme en $\cotan a$.

Q 12 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver à l'aide de la question précédente les racines réelles du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$$

Q 13 Calculer la somme des racines du polynôme $P(X)$.

Q 14 Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On rappelle que $\sin \theta < \theta < \tan \theta$. En déduire que $\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$.

On définit la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Q 15 En utilisant l'inégalité précédente avec les racines de P , montrer que la suite (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.