

Chapitre 3. Polynômes

Aides à la résolution

Maths SUP - Filière MPSI

OPTIMAL SUP-SPE - Concours 2016

★ 1. Composition de polynômes ①

Utiliser la formule du binôme de Newton pour simplifier $P(X + \alpha)$ puis distinguer les cas selon la valeur de β .

☆ 2. Ordre de multiplicité ②

★★ 3. Polynômes d'interpolation de Lagrange ②

1) Reasonner par analyse-synthèse.

3) a) Utiliser les résultats de la question 2.

b) Considérer la différence des deux polynômes dont on veut montrer l'égalité.

4) Utiliser le résultat de la question 3.

5) Considérer la différence $\sum_{i=1}^n L_i(X) - 1$.

☆☆ 4. Autour des polynômes de Lagrange ②

1) Décomposer Q dans $\mathbb{C}_m[X]$.

2) Considérer le degré et le coefficient dominant de T_n .

☆ 5. Reste de la division euclidienne de polynômes ①

Utiliser la définition de la division euclidienne puis considérer les racines du diviseur.

☆ 6. Divisibilité de polynômes ①

1) et 2) : Montrer que les racines du diviseur sont également racines du polynôme que l'on divise.

3) Reasonner par double implication.

☆ 7. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ ②

1) Penser à considérer les polynômes P et P' pour étudier, dans un premier temps, la multiplicité de racines évidentes.

2) Utiliser les résultats sur les racines complexes de l'unité.

☆ 8. Calcul des quelques produits et sommes trigonométriques ②

1) Considérer le polynôme $X^n - 1$ en 1 puis utiliser les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique. Pour simplifier le produit obtenu grâce à la factorisation de $X^n - 1$, on pourra remarquer que $1 = e^{2\pi i k}$.

2) Reasonner comme dans la question précédente.

$$= \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k - \sum_{k=0}^n \alpha_k a^k$$

et donc :

$$P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$$

☞ Se souvenir que, si p et q désignent deux entiers tels que $p < q$: $\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$.

b) D'après le résultat précédent, le polynôme $P(X) - P(a)$ est divisible par $(X - a)^2$ si, et seulement si, $(X - a)$ divise Q , donc si, et seulement si, $\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} a^i \right) = 0$.

Or, on a :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} a^i \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1} \right) \quad \text{et cette dernière somme comportant } k \text{ termes égaux :}$$

$$P(X) - P(a) \text{ est divisible par } (X - a)^2 \text{ si, et seulement si, et seulement si } \sum_{k=1}^n k \alpha_k a^{k-1} = 0$$

☞ Se souvenir que, si n et p sont deux entiers tels que $n \geq p$, la somme $\sum_{k=p}^n u_k$ comporte $n - p + 1$ termes.

c) Par définition, a est racine au moins double de P si, et seulement si, $(X - a)^2$ divise P , donc d'après le résultat précédent, comme $\sum_{k=1}^n k \alpha_k a^{k-1} = P'(a)$:

$$a \text{ est racine au moins double de } P \text{ si, et seulement si } P(a) = P'(a) = 0$$

☞ Se souvenir qu'un nombre λ est racine du polynôme P si, et seulement si $P(\lambda) = 0$.

★★ 3. Polynômes d'interpolation de Lagrange ②

1) Supposons qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = 1$ et : $\forall i \in [1, n] \setminus \{j\}$, $P(x_i) = 0$. Comme, pour tout $i \in [1, n] \setminus \{j\}$, x_i est racine de P , le polynôme $\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (X - x_k)$ divise P . Ce polynôme étant de degré $n - 1$ et P appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

il en découle l'existence d'un réel α tel que : $P = \alpha \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (X - x_k)$.

De plus, comme $P(x_j) = 1$, on a alors :

$$\alpha \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k) = 1 \quad \text{donc, comme } \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k) \neq 0 :$$

$$\alpha = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)} \quad \text{d'où :}$$

$$P = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$$

Ainsi, le polynôme $P = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$ est l'unique polynôme pouvant satisfaire aux conditions énoncées.

Considérons alors le polynôme $P = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$. Le polynôme P étant ici écrit sous forme factorisée, on peut écrire que les éléments de l'ensemble $\{x_i, i \in [1, n] \setminus \{j\}\}$ sont racines de P . Par ailleurs $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on a :

$$P(x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k} \quad \text{donc :} \\ = 1.$$

On peut finalement conclure :

Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_j) = 1$ et $\forall i \in [1, n] \setminus \{j\}, P(x_i) = 0$

2) a) Pour tout $j \in [1, n]$, L_j est le produit de $n - 1$ polynômes de degré 1 admettant respectivement x_k ($k \in [1, n] \setminus \{j\}$) comme racines. On en déduit alors :

Pour tout $j \in [1, n]$, L_j est un polynôme de degré $n - 1$ admettant les éléments de l'ensemble $\{x_k, k \in [1, n] \setminus \{j\}\}$ comme racines.

b) On a : $\forall j \in [1, n], L_j(x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k}$, et donc :

$$\forall j \in [1, n], L_j(x_j) = 1$$

 Les polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont les polynômes de Lagrange. Ils ont pour propriété principale de s'annuler en $n - 1$ points donnés et de prendre la valeur 1 en un autre point donné.

3) a) On a : $\forall k \in [1, n], Q(x_k) = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(x_k)$. Comme pour tout $k \in [1, n]$, on a : $\forall j \in [1, n] \setminus \{k\}, L_j(x_k) = 0$ (cf. question 2a) et $L_k(x_k) = 1$ (cf. question 2b), il ne subsiste dans cette expression que le terme en $j = k$ qui vaut $P(x_k) L_k(x_k) = P(x_k)$, et donc :

$$\forall k \in [1, n], Q(x_k) = P(x_k)$$

b) Soit $H = P - Q$. D'après la question précédente, on a : $\forall k \in [1, n], H(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = 0$. H admet donc au moins n racines dans $\mathbb{R}$.

Or, comme Q est combinaison linéaire des polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ et comme pour tout $j \in [1, n]$, L_j est un polynôme de degré $n - 1$ (cf. question 2a), on peut écrire que : $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, P étant également élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit alors que : $H \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Comme $H \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et comme H admet au moins n racines dans $\mathbb{R}$, on en déduit alors (cf. exercice "Propriétés des polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$ ") que $H = 0$, et donc que :

$$P = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j$$

N.B. : ainsi, tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ s'écrit de manière unique en fonction de $L_1, L_2, \dots, L_n$.

 Pour démontrer que deux polynômes P et Q sont égaux, il existe trois méthodes :

- on démontre que P et Q possèdent les mêmes coefficients,
- on démontre que P et Q possèdent les mêmes racines (en tenant compte des ordres de multiplicité) et le même coefficient dominant,
- on démontre que $P - Q = 0$ en établissant que $P - Q$ possède plus de racines que son degré (cf. exercice "Propriétés des polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$ ").

4) D'après le résultat de la question 3, si P_f existe, alors :

$$P_f = \sum_{j=1}^n P_f(x_j) L_j \quad \text{donc :}$$

$$= \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j.$$

Soit alors A_f le polynôme défini par : $A_f = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j$. Comme A_f est combinaison linéaire des polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ et comme pour tout $j \in [1, n]$, L_j est un polynôme de degré $n-1$, $A_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus, d'après les résultats de la question 3, on peut écrire : $\forall k \in [1, n]$, $A_f(x_k) = f(x_k)$. Il existe donc bien au moins un polynôme $A_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [1, n]$, $A_f(x_k) = f(x_k)$.

Supposons maintenant qu'il existe un autre polynôme $B_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [1, n]$, $B_f(x_k) = f(x_k)$. On a alors : $\forall k \in [1, n]$, $A_f(x_k) = B_f(x_k)$. Comme $A_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $B_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'après le résultat de la question 3b, on peut alors écrire : $A_f = B_f$. On aboutit ainsi à une contradiction et on peut alors conclure :

Il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [1, n]$, $P_f(x_k) = f(x_k)$

N.B. : La famille $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ étant une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on aurait également pu procéder par analyse-synthèse en supposant l'existence d'un polynôme A_f vérifiant les hypothèses et en le décomposant dans cette base. Ainsi, en posant : $A_f = \sum_{k=1}^n a_k L_k$, on montre que : $\forall k \in [1, n]$, $A_f(x_k) = f(x_k)$, et donc, à l'aide de la question 3b que, s'il existe, le polynôme A_f est défini de manière unique.

5) Posons $M = \sum_{j=1}^n L_j - 1$. D'après le résultat de la question 1a, on a :

$$\forall k \in [1, n], \sum_{j=1}^n L_j(x_k) = L_k(x_k) \quad \text{donc, d'après le résultat de la question 1b :}$$

$$= 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall k \in [1, n], M(x_k) = 0.$$

Ainsi, M admet au moins n racines distinctes. Comme M est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ (comme somme de polynômes de degrés respectifs inférieurs ou égaux à $n-1$, cf question 2.a), on peut donc écrire, d'après le résultat de l'exercice "Propriétés des polynômes dans $\mathbb{R}_n[X]$ ", que M est le polynôme nul, et l'on peut donc conclure :

$$\sum_{j=1}^n L_j = 1$$

N.B. : on aurait également pu utiliser le résultat de la question 3b avec $P = 1$.

☆☆ 4. Autour des polynômes de Lagrange ②

1) Soit $m \in \mathbb{N}$, tel que $Q \in \mathbb{C}_m[X]$. Il existe donc un $(m+1)$ -uplet $(a_k)_{0 \leq k \leq m}$ de nombres complexes tel que $Q(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$.

a) On a alors :