

A. Décompositions et divisions de polynômes

★ 1. Composition de polynômes ①

Soient p un entier naturel non nul, (α, β) un couple de réels non nuls et P un polynôme de degré p . On pose :

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k.$$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P(X + \alpha) + \beta P(X)$.

☆ 2. Ordre de multiplicité ②

Soient a un réel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P(X)$ un polynôme de degré n s'écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$.

1) Etablir l'égalité : $P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$ où $Q(X) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i \right)$.

2) En déduire que le polynôme $P(X) - P(a)$ est divisible par $(X - a)^2$ si, et seulement si, le nombre réel $\sum_{k=1}^n k \alpha_k a^{k-1}$ est nul.

3) A quelle condition nécessaire et suffisante le nombre a est-il racine au moins double du polynôme $P(X)$?

★★ 3. Polynômes d'interpolation de Lagrange ②

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de nombre réels distincts.

1) Soit $j \in [1, n]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_j) = 1$ et : $\forall i \in [1, n] \setminus \{j\}, P(x_i) = 0$.

Ce polynôme sera noté L_j . On vérifiera que : $L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$.

2) a) Pour tout $j \in [1, n]$, expliciter le degré et les racines de L_j .

b) Pour tout $j \in [1, n]$, calculer $L_j(x_j)$. Soient P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et Q le polynôme :

$$Q(X) = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(X).$$

a) Pour tout $k \in [1, n]$, calculer $Q(x_k)$.

b) En déduire que :

$$P = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j.$$

4) Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer, à l'aide du résultat de la question 3b qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in [1, n], P_f(x_k) = f(x_k).$$

5) Montrer que :

$$\sum_{j=1}^n L_j(X) = 1.$$

☆☆ 4. Autour des polynômes de Lagrange ②

1) Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Dans tout cet exercice, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathbb{K}[X^p]$ l'ensemble des polynômes de la forme $\sum_{k=0}^n a_k (X^p)^k$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.