

DEVOIR SURVEILLE N°8

18/04/15

Durée : 3h00-Calculatrice et téléphone portable interdits.

- Rédiger les problèmes sur feuilles séparées.
 - Laisser une marge au correcteur, encadrer ou souligner vos résultats.
 - La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent en compte dans la notation.
- LE RESPECT DES CONSIGNES DE PRESENTATION RENTRE DANS L'EVALUATION.

Questions de cours: 15 min

★ Déterminer la limite de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

★ Donner le $DL_{2n+1}(0)$ de $\cos(x)$

★ Donner le $DL_3(0)$ de $f(x) = \arctan(x) \cdot \sqrt{1+x}$

Problème 1: Les polynômes de Laguerre.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que la fonction $f_n: x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $L_n: x \mapsto e^x f_n^{(n)}(x)$

2.a. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$

2.b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$

2.c. Justifier que L_n est une fonction polynômiale et préciser son degré ainsi que son terme dominant.

Dans la suite on identifie la fonction L_n et le polynôme associé.

3.a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$

3.b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, L'_{n+1} = L'_n - L_n$

4.a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x)$

4.b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)L_{n+1} = xL'_n + (n+1 - x)L_n$

5. Montrer que L_n est solution d'une équation différentielle du 2nd ordre.

Problème 2: Intégrales de Wallis et formule de Stirling

On appelle intégrale de Wallis le réel $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ où $n \in \mathbb{N}$

Partie 1: Propriétés de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.a. Calculer I_0 et I_1 , puis justifier, à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$, puis que I converge vers ℓ , $\ell \geq 0$.

2.a. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2.b. En déduire que $I_{n+1} \sim I_n$.

3. Utiliser la question précédente pour démontrer l'une des deux égalités suivantes: