

Problème 1 : Polynômes de Laguerre

sujet classique : CAPES 2011 par exemple.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ et $v : x \mapsto e^{-x}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc d'après les théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. $f^{(n)}$ existe pour tout entier n donc la suite de fonctions (L_n) est bien définie.

2.a. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$L_0(x) = e^x f_0(x) = 1 \quad L_1(x) = e^x f_1'(x) = -x + 1 \quad L_2(x) = e^x f_2''(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

On conjecture ici que L_n est un polynôme de degré n .

2.b. On calcule $f_n^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)$$

$$\text{Or } u^{(n-k)}(x) = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (k+1)}{n!} x^k = \frac{x^k}{k!} \text{ et } v^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x} \text{ donc,}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k e^{-x}$$

$$\text{Comme, } \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x), \text{ on obtient, } \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

$$2.c. \text{ D'après la question précédente, } \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ avec } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \text{ donc,}$$

par définition, L_n est une fonction polynôme.

$$a_n = \binom{n}{n} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0 \text{ donc } L_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\text{Notons que formellement, } L_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

$$3.a. \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} \text{ donc,}$$

$$f'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} = \frac{x^n}{n!} e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

$$3.b. \text{ Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } L_n(x) = e^x \cdot f_n^{(n)}(x) \text{ donc } L'_n(x) = e^x \cdot f_n^{(n)}(x) + e^x \cdot f_n^{(n+1)}(x).$$

$$\text{De même, } L_{n+1}(x) = e^x \cdot f_{n+1}^{(n+1)}(x) \text{ donc } L'_{n+1}(x) = e^x \cdot f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x \cdot f_{n+1}^{(n+2)}(x).$$

Or en dérivant $(n+1)$ fois la relation obtenue à la question 3.a., on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}^{(n+2)}(x) = f_n^{(n+1)}(x) - f_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

$$\text{Par suite, } \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = e^x \cdot f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x \cdot (f_n^{(n+1)}(x) - f_{n+1}^{(n+1)}(x)) = e^x \cdot f_n^{(n+1)}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

$$\text{CCI: } L'_{n+1} = L'_n - L_n.$$

4.a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{n+1} f_n'(x) = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f_{n+1}'(x)$.

4.b. On a $f_{n+1} = g \times f_n$ avec g et f_n de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc on peut dériver $(n+1)$ fois la relation précédente en utilisant la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) f_n^{(n+1-k)}(x).$$

Or $g'(x) = \frac{1}{n+1}$ et $\forall k \geq 2, g^{(k)}(x) = 0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} g^{(0)}(x) f_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} g'(x) f_n^{(n)}(x) = \frac{x}{n+1} f_n^{(n+1)}(x) + \frac{n+1}{n+1} f_n^{(n)}(x).$$

En multipliant par $(n+1)e^x > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (n+1)L_{n+1}'(x) = x.e^x.f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)L_n'(x).$$

Or $f_n^{(n)}(x) = e^{-x}L_n(x)$ donc $f_n^{(n+1)}(x) = e^{-x}.L_n'(x) - e^{-x}.L_n(x)$, on remplace :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(n+1)L_{n+1}'(x) = x.(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n'(x) \Leftrightarrow (n+1)L_{n+1}'(x) = x.L_n'(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

$$CCI : (n+1).L_{n+1}' = xL_n' + (n+1-x)L_n.$$

5. On dérive formellement la relation précédente :

$$(n+1)L_{n+1}' = xL_n'' + L_n' + (n+1-x)L_n' - L_n.$$

Or d'après la question 3, $L_{n+1}' = L_n' - L_n$ donc

$$(n+1)(L_n' - L_n) = xL_n'' + L_n' + (n+1-x)L_n' - L_n \Leftrightarrow xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$$

CCI : La fonction polynôme L_n est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Problème 2 : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Grand classique, le résultat fait partie du cours de spé.

Partie 1 : Propriétés de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$ où $n \in \mathbb{N}$.

1.a. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable affine $u = \frac{\pi}{2} - t$, dans I_n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

1.b. $\sin^n$ est continue et croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sin^n t \leq 1$.

Comme $x \mapsto \sin^n x$ n'est pas la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors $I_n > 0$.

$$\text{De plus } \forall n \in \mathbb{N}, I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin t) \, dt.$$

Comme, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n t (1 - \sin t) \geq 0$, on a $I_n - I_{n+1} \geq 0$ par croissance de l'intégrale.

$$CCI : \forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n.$$