

CCP 2001, filière MP, seconde épreuve

• Partie I

1. Par développement suivant la première ligne, $\det C_P = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

$$2. \chi_{C_P} = \begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix}. \quad \text{Par développement suivant la dernière colonne, il vient :}$$

$$\chi_{C_P} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} (-a_k) (-X)^k 1^{n-1-k} - (X + a_{n-1}) (-X)^{n-1} = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right) = (-1)^n P.$$

3. Il est évidemment nécessaire que le coefficient de X^n dans Q soit égal à $(-1)^n$. C'est aussi suffisant puisque dans ce cas la matrice $A = C_{(-1)^n Q}$ convient d'après le 2.

4. a. Une matrice carrée A et sa transposée ont le même polynôme caractéristique puisque ${}^t A - X I_n = {}^t (A - X I_n)$; elles ont *a fortiori* le même spectre.

b. ${}^t C_P X = \lambda X$ impose $x_2 = \lambda x_1, \dots, x_n = \lambda x_{n-1}$ donc $E_\lambda({}^t C_P)$ est inclus dans $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ et il y a forcément

égalité puisqu'un sous-espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$.

c. $\chi_{{}^t C_P} = \chi_{C_P} = (-1)^n P$ donc ${}^t C_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et si en outre l'ordre de multiplicité de chaque racine est égal à la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire à 1 d'après b.

d. D'après c., ${}^t C_P$ est diagonalisable. D'après b., les colonnes du déterminant de Vandermonde sont des vecteurs propres de ${}^t C_P$ associés respectivement aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; elles forment donc par théorème une famille libre et la non-nullité du déterminant en résulte.

5. a. Soient $P = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$ et $A = C_P \in \mathcal{M}_{2002}(\mathbb{R})$.

$\chi_A = P$ donc $P(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

b. Soit $a \in E \setminus \text{Ker}(f^{n-1})$. On montre facilement que la famille $(f^k(a))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre, donc est une base de E . La matrice de f dans cette base est par construction C_{X^n} .

• Partie II

$$6. AX = \lambda X \text{ donc } |\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = r_i \|X\|_\infty.$$

7. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Avec les notations du 6., on peut choisir $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty > 0$.

On obtient alors $|\lambda| \leq r_i$, donc $\lambda \in D_i$.

8. On sait que les racines de P sont les valeurs propres de C_P . Il suffit donc d'appliquer le résultat du 7. à C_P , avec ici $r_1 = |a_0|, r_2 = 1 + |a_1|, \dots, r_n = 1 + |a_{n-1}|$.

9. Pour le polynôme $P = X^a + X^b - X^c - X^d$, $|a_0|$ et les $1 + |a_k|$ valent 0, 1 ou 2, donc les racines de P sont de module inférieur ou égal à 2, mais 2 n'est pas racine de P car en supposant par exemple que d est inférieur à a, b et c , on voit que $P(2)$ s'écrit $2^d(2m - 1)$ avec $m \in \mathbb{Z}$, donc $P(2) \neq 0$. P n'a donc pas de racine dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Remarque : l'hypothèse de non-nullité de a, b, c, d est inutile.

• Partie III

Remarque : dans toute cette partie, l'hypothèse $a_0 \neq 0$ est inutile.

10. Il suffit de multiplier par λ^n l'égalité $P(\lambda) = 0$.

Remarque : il y a même équivalence entre les deux propriétés (prendre $n = 0$ dans la relation de récurrence).

11. La linéarité de φ est évidente. D'autre part, par définition même de F , il existe une et une seule suite appartenant à F ayant des termes de rang 0 à $p - 1$ imposés ; cela signifie que φ est bijective. On en déduit que $\dim F = p$.

12. a. $e_i(p) = -a_i$ d'après la relation de récurrence.

b. Cette famille est l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1} du 11.

c. Ces deux suites appartiennent à F et prennent les mêmes valeurs aux rangs 0 à $p - 1$, donc sont égales.

13. La linéarité de f est évidente. Si $u \in F$, on voit que la relation de récurrence au rang $n + 1$ pour u est exactement la relation de récurrence au rang n pour $f(u)$, donc $f(u) \in F$ et F est stable par f .

Remarque : on peut aussi observer que $F = \text{Ker } P(f)$, d'où la stabilité demandée puisque f et $P(f)$ commutent.

14. D'après 12.c. et 12.a., $g(e_j) = \sum_{i=0}^{p-1} g(e_j)(i) e_i = \sum_{i=0}^{p-1} e_j(i+1) e_i = \sum_{i=0}^{p-2} \delta_{i+1,j} e_i - a_j e_{p-1}$.

Ainsi, $g(e_0) = -a_0 e_{p-1}$ et pour $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $g(e_j) = e_{j-1} - a_j e_{p-1}$, d'où la matrice demandée.

15. a. On sait par 10. que pour chaque $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite géométrique $n \mapsto \lambda_k^n$ appartient à F ; de plus cette suite est évidemment un vecteur propre de g associé à λ_k .

Comme F est de dimension p , ces p suites constituent une base de F , formée de vecteurs propres de g .

Remarque : l'hypothèse de non-nullité des λ_k est inutile.

b. Il s'agit simplement de la décomposition de u dans la base propre précédente.

16. Ici, $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$.

D'après 15.a. les suites (a^n) , (b^n) et (c^n) forment une base de F .

• Partie IV

17. Il est clair que le rang d'une matrice compagnon de taille n est supérieur ou égal à $n - 1$, donc si A est une matrice de taille n et de rang inférieur ou égal à $n - 2$ (par exemple la matrice nulle), A n'est pas semblable à C_A .

18. $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$ donc $\text{rg}(U - V) = \text{rg}(C_U - C_V) = 1$; en effet, les $n - 1$ premières colonnes de $C_U - C_V$ sont nulles et $C_U - C_V \neq 0$ puisque $U \neq V$.

Remarque : l'hypothèse d'inversibilité de U et V est inutile ici.

19. Prenons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. U et V sont inversibles et $\text{rg}(U - V) = 1$.

Mais $\chi_U = \chi_V = (X - 1)^2$, donc $C_U = C_V$, donc $(**)$ n'est évidemment pas vérifiée. $\chi_U \wedge \chi_V = (X - 1)^2$.

20. $\text{rg}(u - v) = \text{rg}(U - V) = 1$, donc H est un hyperplan d'après le théorème du rang.

21. a. Par l'absurde, supposons $F \subset H$; alors $u_F = v_F$, donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$ et ce polynôme de degré $\dim F \geq 1$ diviserait $\chi_u = \chi_U$ et $\chi_v = \chi_V$; c'est impossible puisque $\chi_U \wedge \chi_V = 1$.

b. D'après a., $F + H$ contient strictement H ; comme H est un hyperplan, cela implique que $F + H = E$.

Soit alors G un supplémentaire de $F \cap H$ dans H . On a $F \oplus G = F + H = E$ et on peut donc construire une base B' de E en concaténant une base B_F de F et une base B_G de G ; comme $G \subset H$, B_G est bien formée de vecteurs de H .

u et v laissent F stable et coïncident sur H donc leurs matrices dans B' sont de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées de taille $\dim F$ et D une matrice carrée de taille $n - \dim F \geq 1$.

Mais alors $\chi_u = \chi_U = \chi_A \chi_D$ et $\chi_v = \chi_V = \chi_B \chi_D$, avec $\deg \chi_D \geq 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\chi_U \wedge \chi_V = 1$.

c. D'après b., les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u et v sont $\{0\}$ et E .

22. a. u est bijectif donc G_j est l'image de H par l'automorphisme u^{-j} , lequel conserve la dimension ; par conséquent, G_j est un hyperplan.

b) Soit φ_j une forme linéaire de E de noyau G_j . D'après le cours, $\dim \left(\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \right) = n - r$, où r est le rang de la famille $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n-2}$. r est inférieur ou égal au cardinal $n - 1$ de cette famille, donc $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

c. Définissons p comme le suggère l'énoncé et raisonnons par l'absurde, en supposant $p \leq n - 1$.

Par définition de y , pour $k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$, $u^k(y) \in H$, donc F est inclus dans H , donc u et v coïncident sur F . D'autre part, d'après la définition de p , $u^p(y)$ appartient à F , donc F est stable par u , et de ce fait aussi par v ; cela contredit 21.c. puisque F n'est ni réduit à $\{0\}$ ($y \neq 0$) ni égal à E ($\dim F = p \leq n - 1$).

On en déduit que $p = n$, et B'' est par conséquent une base de E (famille libre de cardinal n).

d. La forme même de la base B'' montre que la matrice U'' de u dans B'' est une matrice compagnon notée C_Q .

Cela implique que $\chi_u = \chi_{C_Q} = (-1)^n Q$, donc $Q = (-1)^n \chi_u = (-1)^n \chi_U$ et finalement $U'' = C_U$.

Le même raisonnement montre que la matrice de v dans B'' est C_V puisque u et v coïncident sur les $n - 1$ premiers vecteurs cette base.

e. Soit P la matrice de passage de la base B'' à la base B . Le d. et la formule de changement de base montrent que $U = P^{-1}C_U P$ et $V = P^{-1}C_V P$. U et V vérifient donc la propriété (**).

Remarque : on a utilisé l'inversibilité de U mais pas celle de V ; d'autre part, l'hypothèse $\chi_U \wedge \chi_V = 1$ implique évidemment que l'une au moins des matrices U et V est inversible. Finalement, si deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(K)$ telles que $\chi_U \wedge \chi_V = 1$ vérifient (*), alors elles vérifient (**).

23. χ_u et χ_v sont premiers entre eux donc, d'après les questions précédentes, il existe une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de E dans laquelle u et v admettent respectivement pour matrice $C_{X^{n+1}}$ et $C_{X^{n-1}}$; autrement dit :

$$\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, u(e_j) = v(e_j) = e_{j+1}, u(e_n) = -e_1, v(e_n) = e_1.$$

On en déduit que l'ensemble $S = \{\pm e_j ; j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est stable, et par injectivité globalement invariant, par u et v . S est donc encore invariant par tous les éléments du sous-groupe G de $\text{GL}(E)$ engendré par u et v .

Ainsi, chaque $w \in G$ induit une permutation σ_w de S et l'application $w \mapsto \sigma_w$ de G dans $\Sigma(S)$ est injective car comme S contient une base de E , deux endomorphismes de E qui coïncident sur S sont égaux.

On en déduit que G est fini et que $|G| \leq |\Sigma(S)| = (2n)!$