



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont **autorisées**, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-186 du 16/11/99.*

UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Notations et définitions :

Dans tout le problème K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel.

Si u est un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E , on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u$.

On note $K_n[X]$ la K -algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n , $\mathcal{M}_n(K)$ la K -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$; les éléments de $\mathcal{M}_n(K)$ sont notés $M = (m_{ij})$.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A , $\text{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(A - X I_n)$ son polynôme caractéristique et $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $K_n[X]$ on lui associe

$$\text{la matrice compagnon } C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{ij})$ est définie par $c_{ij} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{in} = -a_{i-1}$ et $c_{ij} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II, III, et IV, utilisent les résultats de la partie I, et sont indépendantes entre elles.

Tournez la page S.V.P.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ de $K_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_P} = k P$.
3. Soit Q un polynôme de $K_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = Q$.
4. On note ${}^t C_P$ la transposée de la matrice C_P .
 - a. Justifier la proposition : $\text{Sp}(C_P) = \text{Sp}({}^t C_P)$.
 - b. Soit λ élément de $\text{Sp}({}^t C_P)$, déterminer le sous-espace propre de ${}^t C_P$ associé à λ .
 - c. Montrer que ${}^t C_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et a toutes ses racines simples.
 - d. On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${}^t C_P$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdot & \cdot & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{ est non nul.}$$

5. Exemples :

- a. Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_n.$$
- b. Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1 \leq i \leq n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ et } D_i = \{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i \}.$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

6. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ .

Montrer que pour tout entier $1 \leq i \leq n$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$.

7. Démontrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$.

8. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|, \dots, 1+|a_{n-1}|\}$.

9. Application :

Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E , on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u .

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \dots - a_0u(n).$$

Tournez la page S.V.P.