

PARTIE IV POLYNÔME MINIMAL. DÉCOMPOSITION DE DUNFORD.

Dans cette partie f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n non nulle. On rappelle que f possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Q1 On pose $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul qui vérifie (*).

On note P_f l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{A}$ soit l'ensemble des multiples de P_f .

Q2 a) Soit λ une racine de P_f . On suppose que $f - \lambda \text{Id}_E$ est un automorphisme de E . Montrer alors que le quotient de P_f par $X - \lambda$ est encore un polynôme annulateur de f et en déduire une contradiction.

b) Montrer que le spectre de f est l'ensemble des zéros de P_f .

Q3 a) Montrer que P_f est scindé si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé.

b) Montrer que P_f est scindé à racines simples si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

c) Montrer que si f est diagonalisable alors P_f est scindé à racines simples (on pourra utiliser III Q1 b)).

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposons que P_f est scindé.

Observons qu'il en est ainsi si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Alors il existe un éléments r de $\mathbb{N}^*$, r éléments $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et r éléments $p_1, p_2, \dots, p_r$ de $\mathbb{N}^*$ tels que : $P_f = (X - \lambda_1)^{p_1} (X - \lambda_2)^{p_2} \cdots (X - \lambda_r)^{p_r} = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{p_i}$.

On pose pour tout élément k de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $G_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{p_k}$.

Q4 a) Montrer que $E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$.

b) Montrer que pour tout élément k de $\llbracket 1, r \rrbracket$, G_k n'est pas réduit au vecteur nul (utiliser Q2).

c) Montrer que si les racines de P_f sont simples, f est diagonalisable.

Ainsi f est diagonalisable si et seulement si P_f est scindé à racines simples ou si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

d) ici r est élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour tout élément k de $\llbracket 1, r \rrbracket$, on note Q_k le quotient de P_f par $(X - \lambda_k)^{p_k}$.

Montrer qu'il existe r éléments $U_1, U_2, \dots, U_r$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $\sum_{i=1}^r Q_i U_i = 1$.

e) r appartient à $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et k est un élément de $\llbracket 1, r \rrbracket$. Montrer que $(Q_k U_k)(f)$ est la projection sur G_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r G_i$.

Dans la suite nous noterons q_k cette projection. Montrer que q_k commute avec f .

Si $r = 1$, on pose $q_1 = \text{Id}_E$; q_1 commute avec f , q_1 est un polynôme de f et q_1 est la projection sur G_1 parallèlement à $\{0_E\}$.

On se propose de montrer qu'il existe un couple (d, v) d'endomorphismes de E et un seul tel que :

- $f = d + v$; • d est diagonalisable ; • v est nilpotent ; • $d \circ v = v \circ d$.

Q5 [Existence] On pose $d = \sum_{i=1}^r \lambda_i q_i$ et $v = f - d$. Notons que $f = d + v$.

a) Soit k un élément de $\llbracket 1, r \rrbracket$ et x un élément de G_k . Calculer $d(x)$.

Montrer que d est diagonalisable

b) Montrer que d et v sont des polynômes de f . Prouver alors que d et v commutent.

c) Soit k un élément de $\llbracket 1, r \rrbracket$. Montrer que G_k est stable par v .

On considère alors l'endomorphisme v_k de G_k défini par $\forall x \in G_k, v_k(x) = v(x)$. Montrer que $v_k^{p_k} = 0_{\mathcal{L}(G_k)}$.

Montrer alors que v est nilpotent.

Q6 [Unicité] Soit (d', v') une seconde solution du problème.

a) Montrer que d' et v' commutent avec f .

b) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour d et pour d' . En déduire que $d - d'$ est diagonalisable.

c) Montrer que $v' - v$ est nilpotent.

d) Montrer que $d' = d$ et $v' = v$.
