

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N°04
PROBLÈME 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n = \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \times \cdots \times u_n$$

Partie I. Une condition nécessaire de convergence

1. On suppose que la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente vers une limite non nulle $\ell \in \mathbf{R}^*$. En ce cas, la suite extraite $(p_{n-1})_{n \geq 2}$ est aussi convergente de limite ℓ . Comme ℓ est différente de 0, il s'ensuit par opérations algébriques que $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ est convergente de limite $1 = \frac{\ell}{\ell}$. ▲

2. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, par télescopage, on a

$$p_n = \prod_{k=1}^n u_k = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1$$

Il s'ensuit immédiatement que (p_n) est divergente vers $+\infty$. ▲

Partie II. Utilisation d'une première suite auxiliaire

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite 1.
 - a. Posons $\varepsilon = 1/2$. Comme (u_n) est convergente de limite 1, il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 1| \leq \frac{1}{2}$.
Soit $n \geq n_0$. Alors $1 - u_n < \frac{1}{2}$. En particulier, u_n est strictement positif. ▲
Remarque : vous pouvez répondre correctement à la question en invoquant la compatibilité, limite et inégalité de la façon suivante :
comme (u_n) est convergente de limite ℓ , avec $\ell = 1 > 0$, il existe par compatibilité limite et inégalité un rang n_0 tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 0.$$

- b. On définit pour tout entier $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^n \ln u_k$.

Supposons que (S_n) admette une limite $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

D'après le **théorème de la caractérisation séquentielle de la limite** pour la fonction exponentielle, il en résulte que la suite $(e^{S_n})_{n \geq n_0}$ admet pour limite L , où

- $L = e^\ell$, si $\ell \in \mathbf{R}$
- $L = 0$ si $\ell = -\infty$
- $L = +\infty$ si $\ell = +\infty$. ▲

Or, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $e^{S_n} = \prod_{k=n_0}^n u_k = \frac{p_n}{p_{n_0-1}}$, par opérations algébriques sur des suites possédant des limites, il s'ensuit que (p_n) est convergente de limite $p_{n_0-1} \times L$. ▲

2. Application :

Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \sqrt[n]{n}$.

- a. Soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$. Introduisons la fonction $\varphi : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$. φ est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$ comme quotient de telles fonctions et le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \varphi'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

En conséquence, φ est décroissante sur $[e, +\infty[$. En particulier,

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \varphi(x) \leq \varphi(k) = \frac{\ln k}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k}}.$$

- b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \ln u_k = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$. ▲

Or, d'après la question précédente, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\ln k}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx$$

En sommant terme à terme ces inégalités, j'obtiens une nouvelle minoration de S_n :

$$S_n \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx$$

La dernière égalité provenant de la relation de Chasles appliquée n fois.

$$\text{Or } \int_1^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{n+1} = \frac{\ln^2(n+1)}{2}.$$

Finalement, nous avons obtenu pour S_n la minoration suivante :

$$S_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Le théorème de divergence par comparaison permet alors de conclure à la divergence de (S_n) vers $+\infty$. D'après la question 1, il en découle que (p, n) est divergente vers $+\infty$. ▲

Partie III. Utilisation d'une autre suite auxiliaire

1. On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 1 + v_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de réels **strictement positifs** et **convergente** de limite 0. On note pour tout entier

$$n \in \mathbf{N}^*, T_n = \sum_{k=1}^n v_k$$

- a. Introduisons la fonction $\psi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}^+, \psi(x) = \ln(1+x) - x$. ψ est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ comme somme de telles fonctions et pour tout $x \geq 0$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$. Il s'ensuit que ψ est strictement décroissante sur $[0, +\infty$. Comme $\psi(0) = 0$, la fonction ψ est strictement négative sur $\mathbf{R}^{+*}$. En d'autres termes,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln(1+x) < x}$$

Remarque : on peut aussi traiter plus rapidement cette question à l'aide de la convexité :

la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbf{R}^{+*}$. En particulier son graphe est situé au-dessous de ses tangentes. L'équation de la tangente au point 1, est $y = t - 1$. Par conséquent, $\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \ln t \leq t - 1$. On retrouve alors le résultat en posant $t = 1 + x$. ▲

- b. Supposons que la suite (T_n) est majorée. En ce cas, il existe $M \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad T_n \leq M$$

- Montrons que (T_n) est convergente.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $T_{n+1} - T_n = v_{n+1}$. Comme la suite (v_n) est strictement positive (par hypothèse), il en résulte que (T_n) est croissante.

Ainsi, (T_n) est croissante et majorée. D'après le **théorème de la limite montone** elle est donc convergente.

- Montrons que (S_n) est convergente.

Comme ci-dessus, la suite (S_n) est croissante puisque pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \ln(1 + v_{n+1}) > 0$. Montrons qu'elle est majorée.

Pour cela, utilisons l'inégalité établie à la question 1.a

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après 1.a, il vient

$$\ln(1 + v_k) < v_k$$

Sommons terme à terme ces inégalités, il en résulte que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + v_k) \leq \sum_{k=1}^n v_k = T_n$$

(T_n) étant majorée par M , il s'ensuit que $S_n \leq M$.

Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons prouvé que (S_n) est majorée par M . Comme elle est croissante, il découle *once again* du **théorème de la limite monotone** que (S_n) converge.

- Enfin, comme la suite (S_n) converge, les résultats de la **Partie II** s'appliquent : la suite (p_n) est donc convergente. ▲

2. Application :

Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*, p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^{2^k})$, où $a \in]0, 1[$ est fixé.

- a. Remarquons qu'ici, $u_n = 1 + a^{2^k}$, avec $a > 0$. Par conséquent, pour que la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ soit convergente, il suffit, d'après la question précédente que la suite (T_n) soit majorée :

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Par définition $T_n = \sum_{k=1}^n a^{2^k} = a^2 + a^4 + a^8 + \dots + a^{2^n}$.

T_n ressemble donc à la somme des termes d'une suite géométrique, mais il manque des puissances de a . Qu'à cela ne tienne, en les rajoutant, nous obtenons la majoration :

$$T_n \leq \sum_{k=1}^{2^n} a^k = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{2^n} = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}$$

Ainsi, (T_n) est majorée par $\frac{1}{1-a}$. D'après la question précédente (p_n) est convergente. ▲

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (1 - a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $(1 - a^2)p_1 = (1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4$

• **Hérédité** : soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $(1 - a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$. Alors

$$\begin{aligned} (1 - a^2) \times p_{n+1} &= (1 - a^2) \times p_n \times (1 + a^{2^{n+1}}) \\ &= (1 - a^{2^{n+1}}) \times (1 + a^{2^{n+1}}) \\ &= 1 - \left(a^{2^{n+1}}\right)^2 = 1 - a^{2 \times 2^{n+1}} = 1 - a^{2^{n+2}} \end{aligned}$$

• **Ccl** par récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad OK_n$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons donc $p_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - a^2}$.

Ainsi (p_n) est convergente, ce que nous savions déjà et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{1 - a^2}$$

▲

EXERCICE 1

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + u_n^2 \\ u_0 &= a, \quad a \in \mathbf{R}^{+*} \end{cases}$$

Partie I. Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

1. Une récurrence[⊗] immédiate montre que (u_n) est strictement positive : en effet

Initialisation : $a > 0$

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \geq u_n > 0$. Par transitivité de l'ordre, il s'en suit que $u_{n+1} > 0$.

Conclusion : Par récurrence, j'ai démontré que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0$.

[⊗] on peut aussi utiliser le fait que $\mathbf{R}^{+*}$ est stable pour la fonction itératrice $f : x \mapsto x + x^2$

Il en résulte immédiatement que (u_n) est strictement croissante :

Soit $n \in \mathbf{N}$, alors d'après ce qui précède $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$. J'en déduis que (u_n) est strictement croissante. ▲

2. Recall that increasing sequences are either converging to a finite value or diverging to $+\infty$. Montrons par **l'absurde** que (u_n) ne peut être convergente : Supposons au contraire que (u_n) converge vers une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & u_n + u_n^2 \\ \swarrow & & \searrow \\ \ell & = & \ell + \ell^2 \end{array}$$

D'après les propriétés algébriques des suites convergentes [Ⓔ], la suite de terme général $u_n + u_n^2$ est convergente de limite ℓ . De même, la suite (u_{n+1}) extraite de la suite u_n est aussi convergente vers ℓ . Par unicité de la limite, il en résulte que $\ell = \ell + \ell^2$, i.e. $\ell = 0$. Or la suite (u_n) est croissante donc minorée par $a > 0$: elle ne peut converger vers 0. *Contradiction* ▲

Partie II. Etude d'une suite auxiliaire

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$$

Comme la suite (u_n) est strictement positive, la suite auxiliaire v est bien définie.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln u_{n+1} - \frac{1}{2^n} \ln u_n = \frac{1}{2^{n+1}} (\ln(u_{n+1}) - 2 \ln u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n^2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right). \end{aligned}$$

Soient p et n des entiers naturels quelconques, en appliquant ce qui précède aux deux termes consécutifs v_{n+p+1} et v_{n+p} de la suite v , j'obtiens directement

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right)$$

Or d'après la question 1 a. la suite (u_n) est strictement croissante, par conséquent la suite $\ln \frac{1}{u_n}$ est strictement décroissante. Comme 2^{n+p+1} est positif, j'en déduis que :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

▲

2. Soit $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, Ecrivons

$$v_{n+k+1} - v_n = \sum_{j=0}^k v_{n+1+j} - v_{n+j}$$

Or pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, nous avons d'après la question précédente

$$0 < v_{n+1+j} - v_{n+j} \leq \frac{1}{2^{n+1+j}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

Sommant terme à terme cet encadrement conduit à

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{n+1+j}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \sum_{j=0}^k \left(\frac{1}{2} \right)^j.$$

[Ⓔ] ou par le théorème de la **Caractérisation séquentielle de la continuité** appliqué à la fonction itératrice continue, ou bien encore par le théorème sur les limites des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction itératrice f continue sur un intervalle stable

Or, $\sum_{j=0}^k (1/2)^j = 2 \left(1 - (1/2)^{k+1}\right) \leq 2$. Par conséquent,

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$



identité

géométrie

3. Choisissons $n = 0$, il vient : $\forall k \in \mathbf{N}$, $0 < v_{k+1} - \ln a \leq \ln \left(1 + \frac{1}{a}\right)$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul k :

$$\ln a < v_k \leq \ln a + \ln \left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

Il en résulte immédiatement que la suite v est bornée.

Choisissons $k = 0$, alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$. D'où je tire que v est strictement croissante. La suite v étant croissante et majorée est donc convergente d'après le **théorème de la Li-Mo**. On note $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.



Partie III. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

1. Comme v est croissante et convergente de limite α , il en résulte que $\alpha = \sup_n v_n$. En particulier, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leq \alpha$. Comme



thanks to Li-Mo

thm

$$\frac{1}{2^n} \ln u_n \leq \alpha \iff \ln u_n \leq 2^n \alpha \iff u_n \leq \exp(\alpha 2^n),$$

j'endéduis que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Pour tout entier naturel $k \in \mathbf{N}$, nous avons démontré que :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Or la suite (v_{n+k+1}) étant extraite de v converge quand k tend vers $+\infty$ vers α . Ainsi, par compatibilité du passage à la limite dans une inégalité, j'obtiens l'encadrement : $0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$, c'est-à-dire

$$2^n \alpha - 2^n v_n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Comme la fonction $\exp$ est (strictement) croissante, et que $u_n = \exp(2^n v_n)$, j'en déduis que

$$\exp(2^n \alpha) \leq 1 + u_n$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , u_n vérifie l'encadrement :

$$e^{2^n \alpha} - 1 \leq u_n \leq e^{2^n \alpha}$$

D'où je tire, en divisant tous les membres de cet encadrement par $\exp(2^n \alpha)$,

$$1 - e^{-2^n \alpha} \leq \frac{u_n}{e^{2^n \alpha}} \leq 1$$

On conclut alors, grâce au **théorème de convergence par encadrement** que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^{2^n \alpha}} = 1$. Autrement dit

$$u_n \sim_{+\infty} \exp(\alpha 2^n)$$



2. On pose

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$$

D'après la question précédente, l'encadrement suivant est valide pour tout entier naturel n

$$e^{2^n \alpha} - 1 \leq u_n \leq e^{2^n \alpha}$$

Il en résulte *at once* que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq \beta_n \leq 1$$

De plus, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \times e^{-\alpha 2^n} &= [e^{\alpha \times 2 \times 2^n} - u_n^2 - u_n + e^{\alpha 2 \times 2^n} - 2u_n e^{\alpha 2^n} + u_n^2 - e^{\alpha 2^n} + u_n] \times e^{-\alpha 2^n} \\ &= [2e^{\alpha \times 2 \times 2^n} - 2u_n e^{\alpha 2^n} - e^{\alpha 2^n}] \times e^{-\alpha 2^n} \\ &= [2e^{\alpha \times 2^n} - 2u_n - 1] \\ &= 2\beta_n - 1 \end{aligned}$$

▲

3. Montrons que la suite (β_n) est convergente. Remarquons tout d'abord que la suite $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)_n$ est bornée car, d'après la question 3.b. $(\beta_n)_n$ l'est. Soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N} \quad |\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| \leq M$.

Ainsi

$$|2\beta_n - 1| = \left| \frac{\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n}{e^{\alpha 2^n}} \right| \leq \frac{M}{e^{\alpha 2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le **théorème de convergence par comparaison**, la suite $(2\beta_n - 1)$ est convergente de limite nulle, c'est-à-dire (β_n) est convergente de limite $1/2$. Ainsi pouvons nous écrire $\beta_n \sim 1/2$, ou bien encore $\beta_n = 1/2 + o_{+\infty}(1)$. Substituons cette expression dans la définition de β_n , nous obtenons finalement :

$$u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o_{+\infty}(1)$$

▲

EXERCICE 2

1. Soit a, b deux réels strictement positifs. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &\iff \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff (a+b)^2 \geq 4ab \\ &\iff (a-b)^2 \geq 0 \\ \frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &\iff (a-b)^2 = 0 \iff a = b \end{aligned}$$

2. On se propose de montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

a. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, u_n, v_n sont bien définis et $0 \leq v_n \leq u_n$.

- **Init.** pour $n = 1$, on a $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2}$ et $\frac{1}{2}(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{v_0})$ sont bien définis et strictement positifs. D'après la première question, il s'ensuit que u_1 et v_1 sont bien définis et vérifient $0 < v_1 \leq u_1$.

- **Hér.** Soit $n \geq 1$ tel que u_n, v_n sont bien définis et $0 \leq v_n \leq u_n$. Alors, u_{n+1} et v_{n+1} sont bien définis et d'après **1.**, on a $0 < v_{n+1} \leq u_{n+1}$.
- **Concl.** Pour tout entier $n \geq 1$, u_n, v_n sont bien définis et $0 \leq v_n \leq u_n$.

b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0 \quad \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_n}{u_n} \right) \leq 1$$

Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on a montré que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

c. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - v_{n+1}| &= \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \right| = \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \right| \\ &= \left| \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \right| |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2} |u_n - v_n|. \end{aligned}$$

D'après le **Théorème des T-shirts chinois**[®] $(u_n - v_n)_{n \geq 0}$ est convergente vers 0. Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes. Par théorème, elles sont donc convergentes et de même limite.

- 3.** Soit $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \times v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} = u_n v_n$. Par conséquent, le produit $u_n v_n$ est constant égal à $u_0 v_0 = uv$.

On peut donc en déduire que la limite commune des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ est $\sqrt{uv}$. ▲

 Ce théorème de comparaison logarithmique n'est pas au programme, vous pouvez indiquer qu'une récurrence immédiate permet d'en déduire que

$$|u_n - v_n| \leq (1/2^n) |u_0 - v_0|$$