

DEVOIR SURVEILLÉ N°04**durée de l'épreuve 4 heures****— LISEZ-MOI !**

Ce sujet permet un tour d'horizon sur l'étude des suites de réels. Vous ferez bien attention à la rigueur de vos raisonnements et à la manipulation d'inégalités, nombreuses dans ce sujet.

Comme d'habitude, prenez 10 minutes au début de l'épreuve pour regarder l'ensemble du sujet et repérer les parties que vous connaissez bien, ou au contraire les parties qui vous semblent plus difficiles.

et débutez par ce que vous savez le mieux faire !

— COMPOSITION DE L'ÉPREUVE ET BARÈME APPROXIMATIF**■ PROBLÈME 1 : Sommes et produits infinis convergents**

Mots-clés : Suites définies par un produit ou une somme infinis ≈ 10 pt

■ EXERCICE 1 : Étude d'une suite récurrente

Mots-clés : monotonie, comportement asymptotique ≈ 8 pt

■ EXERCICE 2 : Moyenne arithmético-harmonique

Mots-clés : suites adjacentes ≈ 2 pt

Nb : L'utilisation des calculatrices est interdite.

PROBLÈME 1 : Sommes et produits infinis convergents

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n = \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \times \cdots \times u_n$$

Partie I. Une condition nécessaire de convergence

1. On suppose que la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente vers une limite non nulle $\ell \in \mathbf{R}^*$. En considérant le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$, montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente de limite 1.
2. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Vérifiez que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente de limite 1 et que la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ diverge.

Partie II. Utilisation d'une première suite auxiliaire

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite 1.
 - a. Montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 0$.
 - b. On définit pour tout entier $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n \ln u_k$. Montrez que
si $(S_n)_{n \geq n_0}$ admet une limite (finie ou infinie) alors $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ admet aussi une limite.

Précisez les liens entre les limites de $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et de $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

2. Application :

Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sqrt[n]{n}$.

- a. Justifiez que $\forall k \in \mathbf{N}, k \geq 3, \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k}$.
- b. Déduisez-en le comportement des suites (S_n) et (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III. Utilisation d'une autre suite auxiliaire

1. On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + v_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de réels **strictement positifs** et **convergente** de limite 0. On note pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*, T_n = \sum_{k=1}^n v_k$
 - a. Montrez que $\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \ln(1+x) < x$.
 - b. Montrez que si la suite (T_n) est majorée, alors les suites (T_n) , (S_n) et (p_n) sont convergentes.

2. Application :

Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^*, p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^{2^k})$, où $a \in]0, 1[$ est fixé.

- a. Montrez que la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.
- b. Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^*$, calculez $(1 - a^2)p_n$ et déduisez-en la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

EXERCICE 1 : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\begin{cases} \bullet & u_0 = a, \quad a \in \mathbf{R}^{+*} \\ \bullet & \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

Partie I. Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

1. Montrez que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrez que cette suite est divergente vers $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite auxiliaire

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$

1. Prouvez que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$
Déduisez-en que pour tous entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

2. Utilisez un *télescopage*, pour obtenir la *propriété universelle* :

$$\forall (n, k) \in \mathbf{N}^2, \quad 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

3. En *choisissant astucieusement* n ou k , démontrez que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α .

Partie III. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

1. Montrez que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$
En passant à la limite quand k tend vers $+\infty$ -pour n fixé- dans l'encadrement obtenu à la question **Partie II.2.**, prouvez que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

En déduire, lorsque n tend vers $+\infty$, l'équivalent $u_n \sim_{+\infty} \exp(\alpha 2^n)$

2. On pose $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
Montrez que la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n)$$

3. Prouvez enfin que lorsque n tend vers $+\infty$ $u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o_{+\infty}(1)$

EXERCICE 2 : Moyenne arithmético-harmonique

On considère deux réels strictement positifs u et v . On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ en posant $u_0 = u$, $v_0 = v$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ \frac{1}{v_{n+1}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right) \end{cases}$$

1. Étant donné deux réels strictement positifs a, b , montrez que $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
2. On se propose de montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
 - a. Montrez pour tout entier $n \geq 1$, les nombres u_n et v_n sont bien définis et que $v_n \leq u_n$.
 - b. Prouvez que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 - c. Montrez que pour tout entier $n \geq 0$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$.
Déduisez-en que $(u_n - v_n)_{n \geq 0}$ est convergente vers 0 et concluez.
3. Calculez pour tout $n \in \mathbf{N}$ le produit $u_n v_n$.
Déduisez-en la limite commune des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

Fin du sujet