

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N°04

PROBLÈME 1

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que u est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) (\forall (m, p) \in \mathbf{N}^2) (m \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \Rightarrow |u_m - u_p| \leq \varepsilon)$$

Partie I. Une condition nécessaire de convergence

1. Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de nombres réels. Appliquons la définition de suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$. Il en résulte l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall (m, p) \in \mathbf{N}^2, (m \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0) \Rightarrow |u_m - u_p| \leq 1 \quad (1)$$

Posons $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|\}$. Considérons $k \in \mathbf{N}$: deux cas se présentent :

- si $k \in [0, n_0 - 1]$, alors $u_k \in \{u_0, \dots, u_{n_0-1}\}$ et dans ce cas, $|u_k| \leq M$.
- si $k \geq n_0$, alors l'**inégalité triangulaire** donne :

$$\begin{aligned} |u_k| &\leq |u_k - u_{n_0} + u_{n_0}| \\ &\leq |u_k - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \end{aligned}$$

Or d'après (1) $|u_k - u_{n_0}| \leq 1$, par suite

$$|u_k| \leq 1 + |u_{n_0}| \leq M$$

- dans tous les « k », on a bien établi que $|u_k| \leq M$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc bornée.

▲

2. Soit (u_n) une suite de réels telle que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$, et $(u_{3n})_{n \in \mathbf{N}}$ soient des suites de Cauchy. Montrons que (u_n) est de Cauchy.
- Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé et posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Comme par hypothèse les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$, et $(u_{3n})_{n \in \mathbf{N}}$ sont de Cauchy, il existe par définition des entiers n_0 , n_1 et n_2 tels que

$$\forall (m, p) \in \mathbf{N}^2, (m \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0) \Rightarrow |u_{2m} - u_{2p}| \leq \varepsilon' \quad (2)$$

$$\forall (m, p) \in \mathbf{N}^2, (m \geq n_1 \text{ et } p \geq n_1) \Rightarrow |u_{2m+1} - u_{2p+1}| \leq \varepsilon' \quad (3)$$

$$\forall (m, p) \in \mathbf{N}^2, (m \geq n_2 \text{ et } p \geq n_2) \Rightarrow |u_{3m} - u_{3p}| \leq \varepsilon' \quad (4)$$

Posons $N_0 = \max\{2n_0, 2n_1 + 1, 3n_2\}$. On montre que pour tout couple d'entiers $(M, P) \in \mathbf{N}^2$ tel que $M \geq N_0$ et $P \geq N_0$, on a $|u_M - u_P| \leq \varepsilon$.

Soit donc $(M, P) \in \mathbf{N}^2$ un tel couple d'entiers. Trois cas se présentent :

- si $M = 2m$ et $P = 2p$ sont pairs. En ce cas, on déduit des inégalités $M \geq N_0$ et $P \geq N_0$ que $m \geq n_0$ et $p \geq n_0$. A l'aide de (2), il s'ensuit que $|u_M - u_P| \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$.
- si $M = 2m + 1$ et $P = 2p + 1$ sont tous deux impairs, on déduit des inégalités $M \geq N_0$ et $P \geq N_0$ que $m \geq n_0$ et $p \geq n_0$. (3), permet en ce cas d'enduire que $|u_M - u_P| \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$.
- si M et P sont de parité différentes, par exemple si $M = 2m$ est pair tandis que $P = 2p + 1$ est impair, on introduit les termes u_{6m} et u_{6p+3} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |u_M - u_P| &= |u_{2m} - u_{2p+1}| \leq |u_{2m} - u_{6m} + u_{6m} - u_{6p+3} + u_{6p+3} - u_{2p+1}| \\ &\leq |u_{2m} - u_{6m}| + |u_{6m} - u_{6p+3}| + |u_{6p+3} - u_{2p+1}| \end{aligned}$$

- comme $2m \geq 2n_0$, on a d'après (2), $|u_{2m} - u_{6m}| \leq \varepsilon'$.
- comme $2p + 1 \geq 2n_1 + 1$, on a d'après (3), $|u_{2p+1} - u_{6p+3}| \leq \varepsilon'$.
- comme $2m \geq 3n_2$, et $2p + 1 \geq 3n_2$, (4) donne $|u_{6m} - u_{6p+3}| \leq \varepsilon'$.

En ajoutant terme à terme ces inégalités, on obtient que $|u_M - u_P| \leq \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$.

- dans tous les cas, on a bien établi que

$$|u_M - u_P| \leq \varepsilon$$

▲

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbf{R}$. Montrons que u est de Cauchy :
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme (u_n) est convergente de limite ℓ , il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon' \quad (5)$$

Soit $(m, p) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \geq n_0$ et $p \geq n_0$. Par l'**inégalité triangulaire**, il vient :

$$|u_m - u_p| = |u_m - \ell + \ell - u_p| \leq |u_m - \ell| + |u_p - \ell| \leq \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

▲

Partie II. Convergence des suites de Cauchy

On se propose de montrer dans cette partie que toute suite de Cauchy (de nombres réels) converge.

Soit donc $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de nombres réels.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On note $U_n = \{u_k ; k \geq n\}$. D'après la question **I.1**, la suite u est bornée. A fortiori, la partie non vide U_n est donc elle aussi majorée et minorée. D'après les **propriétés de la borne supérieure et inférieure**, U_n possède une borne supérieure et d'une borne inférieure.

On note $v_n = \sup U_n = \sup\{u_k ; k \geq n\}$ et $w_n = \inf U_n = \inf\{u_k ; k \geq n\}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On a par construction

$$U_{n+1} \subset U_n$$

Soit alors $k \geq n + 1$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} u_k &\leq \sup\{u_k ; k \geq n\} & u_k &\geq \inf\{u_k ; k \geq n\} \\ &\leq v_n & &\geq w_n \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout entier $k \geq n + 1$, j'en déduis par *passÔsup* et *passAlinf* que $v_{n+1} \leq v_n$ et $w_{n+1} \geq w_n$.

Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a bien établi que la suite (v_n) est décroissante et que la suite (w_n) est croissante. ▲

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Clairement $u_n \in U_n$. Par construction de v_n et w_n , il en découle directement que $w_n \leq u_n \leq v_n$. ▲

4. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que pour tout couple $(m, p) \in \mathbf{N}^2$ d'entiers supérieurs à n_0 , on ait $|u_m - u_p| \leq \varepsilon$.

Soit (m, p) un tel couple.

Soit $k \geq m$. On a donc $|u_k - u_p| \leq \varepsilon$, d'où l'on tire que $u_k \leq u_p + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $k \geq m$, on en déduit en passant au sup que $v_m \leq \varepsilon + u_p$. Autrement dit,

$$u_p \geq v_m - \varepsilon$$

Ceci étant vrai en particulier pour tout $p \geq m$, un passage à l'inf permet d'en déduire que $w_m \geq v_m - \varepsilon$.

Conclusion pour tout $\varepsilon > 0$, on a construit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que si $m \geq n_0$, on a $0 \leq v_m - w_m \leq \varepsilon$. Par définition, on a montré que la suite $(w_m - v_m)$ est convergente vers 0. ▲

5. D'après les questions **1.2,4**, les suites (v_m) et (w_m) sont donc adjacentes. D'après le **Théorème de convergence des suites adjacentes** elles sont donc convergentes de même limite. Notons ℓ leur limite commune.

Or, d'après la question **1.3** ces deux suites encadrent (u_m) . D'après le **théorème de convergence par encadrement**, il en résulte que u est aussi convergente de limite ℓ . ▲

Partie III. Application :

1. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

a. Par récurrence, on montre que $\forall n \geq 4, \quad n! \geq 2^n$.

- **Init.** pour $n = 4$, on a $4! = 24 > 2^4 = 16$.
- **Hér.** soit $n \geq 4$ tel que $n! \geq 2^n$. Alors

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \geq (n+1) 2^n \geq 5 2^n \geq 2^{n+1}$$

La propriété est héréditaire.

- **Ccl.** par récurrence, on a montré que $\forall n \geq 4, \quad n! \geq 2^n$, ce qui revient précisément à dire que

$$\forall k \in \mathbf{N}, k \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$$

▲

b. Soit $(m, p) \in \mathbf{N}^3$ tel que $m \geq p \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} |u_m - u_p| &\leq \left| \sum_{k=p+1}^m \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=p+1}^m \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=p+1}^m \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{m-p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1 - (1/2)^{m-p}}{1 - (1/2)} \\ &\leq \frac{1}{2^p} \end{aligned}$$

▲

c. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(1/2^p)$ est convergente vers 0, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que ($n_0 \geq 4$ et)

$$\frac{1}{2^{n_0}} \leq \varepsilon \quad (6)$$

Soit $(m, p) \in \mathbf{N}^2$ tels que $m \geq n_0$ et $p \geq n_0$. D'après la question précédente, on en déduit que $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que (u_n) est de Cauchy. D'après la question II.5, ceci entraîne que la suite (u_n) est convergente. ▲

PROBLÈME 2

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, deux réels positifs ou nuls.

Partie I. Étude de deux suites imbriquées

On définit deux suites par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad b_{n+1} &= (a_n + b_n)/2 \end{aligned}$$

1. • lorsque $a = 0$, la suite (a_n) est constante égale à 0, par conséquent, la suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme b de raison $\frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{b}{2^n}$$

- lorsque $b = 0$, alors $a_1 = 0$. Par conséquent $(a_n)_{n \geq 1}$ est nulle et par conséquent la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est la suite géométrique de premier terme $\frac{a}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{a}{2^n}$$

- lorsque $a = b$. Les suites (a_n) et (b_n) sont constantes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = a \text{ et } b_n = b$$

▲