

PROBLÈME 1 : Suites de Cauchy

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que u est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) (\forall (m, p) \in \mathbf{N}^2) (m \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \Rightarrow |u_m - u_p| \leq \varepsilon)$$

Remarque : une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc de Cauchy si deux termes quelconques u_m et u_p sont arbitrairement proches pourvu que m et p soient suffisamment grands.

Partie I. Une condition nécessaire de convergence

1. Montrez que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrez que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Partie II. Convergence des suites de Cauchy

On se propose de montrer dans cette partie que toute suite de Cauchy (de nombres réels) converge.

Soit donc $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de nombres réels.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On note $U_n = \{u_k ; k \geq n\}$. Montrez que U_n possède une borne supérieure et d'une borne inférieure.

On note $v_n = \sup U_n = \sup\{u_k ; k \geq n\}$ et $w_n = \inf U_n = \inf\{u_k ; k \geq n\}$.

2. Montrez que la suite (v_n) (resp. (w_n)) ainsi construite est décroissante (resp. croissante).
3. Établissez que $\forall n \in \mathbf{N}, w_n \leq u_n \leq v_n$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, on considère un entier n_0 (dont l'existence est garantie) tel que pour tout couple $(m, p) \in \mathbf{N}^2$ d'entiers supérieurs à n_0 , on ait $|u_m - u_p| \leq \varepsilon$.

Soit (m, p) un tel couple. Montrez que $v_m \leq \varepsilon + u_p$, puis que $v_m - w_m \leq \varepsilon$.

5. Montrez enfin que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

Partie III. Application :

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

1. Justifiez l'existence d'un entier $q \in \mathbf{N}$ tel que $\forall k \in \mathbf{N}, k \geq q \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$.
2. Montrez que pour tout couple $(m, p) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \geq p \geq q$, on a $|u_m - u_p| \leq \frac{1}{2^p}$.
3. Déduisez-en que (u_n) est convergente