

PROBLÈME 2 :

1. On montre d'abord que $u_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est vrai pour $n = 0$, pour $n = 1$, puis si c'est vrai au rang n et au rang $n + 1$, alors cela reste vrai au rang $n + 2$ car la somme de deux entiers naturels non nuls en est encore un).

Ensuite, on a $u_1 - u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante (strictement à partir du rang 1).

2. L'assertion $u_n \geq n$ est vraie au rang 0, au rang 1 et au rang 2 ;
soit $n \geq 1$ donné, si on a $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n + 1$, alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq (n + 1) + n = 2n + 1 \geq n + 2$$

(cette dernière inégalité est vraie pour $n \geq 1$, ce qui obligeait à vérifier l'assertion $u_n \geq n$ aussi pour $n = 2$).

Par les théorèmes de comparaison, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Pour $n \geq 1$, on a

$$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = u_n(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1}^2 = u_n^2 - (u_{n+1} - u_n)u_{n+1} = u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}.$$

Ainsi, en posant $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a prouvé la relation $a_n = -a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit (a_n) est une suite géométrique de raison -1 ; comme $a_0 = u_0 u_2 - u_1^2 = 1$, on a donc $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait prouver.

4.a. Immédiat : $v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{v_n}.$

b. Vérifions :

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_n &= \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+3}u_n - u_{n+1}u_{n+2}}{u_n u_{n+2}} \\ &= \frac{(u_{n+1} + u_{n+2})u_n - u_{n+1}(u_n + u_{n+1})}{u_n u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}. \end{aligned}$$

- c. Étudions le sens de variation de (x_n) :

$$x_{n+1} - x_n = v_{2n+2} - v_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n} u_{2n+2}} = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+2}} > 0$$

et la suite (x_n) est strictement croissante.

De même,

$$y_{n+1} - y_n = v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+1} u_{2n+3}} = -\frac{1}{u_{2n+1} u_{2n+3}} < 0$$

et la suite (y_n) est strictement décroissante.

Enfin, $y_n - x_n = v_{2n+1} - v_{2n} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} - \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+2}u_{2n} - u_{2n+1}^2}{u_{2n}u_{2n+1}} = \frac{1}{u_{2n}u_{2n+1}}$ tend vers zéro car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = +\infty$ (ce sont des suites extraites de (u_n) qui tend vers $+\infty$).

- d. Les suites (x_n) et (y_n) , adjacentes, ont une limite commune l . Une suite (v_n) , dont les deux suites extraites constituées respectivement des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs convergent vers la même limite, est convergente (*propriété démontrée en cours*), donc (v_n) converge vers l .

Enfin, en passant à la limite dans la relation obtenue en a., on obtient $l = 1 + \frac{1}{l}$, soit $l^2 - l - 1 = 0$, d'où $l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La suite (v_n) étant à termes positifs, on a nécessairement $l \geq 0$, donc $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.