

Corrigé du problème
Autour de la constante d'Euler

Partie 1 — Développement asymptotique de la série harmonique

La partie a pour but d'obtenir un développement asymptotique de H_n à deux termes.

1.1. Deux inégalités.

1.1.a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall k \leq x \leq k+1, \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

d'où, par positivité de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$$

ie.

$$\frac{1}{k+1} \leq \ell n(k+1) - \ell n(k) \leq \frac{1}{k}$$

1.1.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on déduit de la question précédente que

$$\ell n(k+1) - \ell n(k) \leq \frac{1}{k}$$

d'où, par superposition des inégalités,

$$\sum_{k=1}^n (\ell n(k+1) - \ell n(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

soit, après telescopage,

$$\ell n(n+1) \leq H_n$$

Pour $n=1$, $H_1 = 1 \leq \ell n(1) + 1 = 1$. On peut donc supposer $n \geq 2$. Pour tout $1 \leq k \leq n-1$, on déduit de la question précédente que

$$\ell n(k+1) - \ell n(k) \geq \frac{1}{k+1}$$

d'où, par superposition des inégalités,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\ell n(k+1) - \ell n(k)) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

soit, après telescopage,

$$\ell n(n+1) \geq H_n - 1$$

On en déduit que

$$H_n \leq \ell n(n+1) + 1$$

1.2. La constante d'Euler. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = H_n - \ell n(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ell n(n)$$

1.2.a. Procédons en trois temps.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ell n(n+2) + \ell n(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ell n(n+2) + \ell n(n+1) \geq 0$$

d'après la question **1.1.a.** appliquée à $k = n+1$. Ainsi $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - H_n - \ell n(n+1) + \ell n(n) = \frac{1}{n+1} - \ell n(n+1) + \ell n(n) \leq 0$$

d'après la question **1.1.a.** appliquée à $k = n$. Ainsi $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

► On a clairement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n = \ell n(n+1) - \ell n(n) = \ell n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes.

1.2.b. Comme les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes de limite γ et respectivement croissante et décroissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \gamma \leq v_n$$

Comme $u_1 = 1 - \ell n(2) > 0$ et $v_2 = 3/2 - \ell n(2) < 1$ (car $\ell n(2) > 1/2$), on a $0 < \gamma < 1$.

1.2.c. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - \gamma) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ell n(n) - \gamma)$$

ce qui équivaut à

$$H_n = \ell n(n) + \gamma + o(1)$$

Partie 2 — Application à la série harmonique alternée

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad y_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

2.1. Etude de $(x_n)_{n \geq 1}$. Pour tout entier naturel n non nul, on a

$$x_n = H_{2n} - H_n$$

Or, d'après la dernière question de la première partie, on a $H_n = \ell n(n) + \gamma + o(1)$. On en déduit que

$$x_n = \ell n(2n) - \ell n(n) + o(1) = \ell n(2) + o(1)$$

ie.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell n(2)$$

2.2. Etude de $(x_n)_{n \geq 1}$.**2.2.a.** Procédons en trois temps.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$y_{2n+2} - y_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

donc $(y_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$y_{2n+3} - y_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$$

donc $(y_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante.

► On a clairement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_{2n+1} - y_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_{2n+1} - y_{2n}) = 0$$

Ainsi $(y_{2n})_{n \geq 1}$ et $(y_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes.

2.2.b. Comme $(y_{2n})_{n \geq 1}$ et $(y_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes, elles sont convergentes de même limite et on déduit alors du cours sur les suites extrêmes que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers cette limite commune.

2.2.c. Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} y_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2m}}{2m+1} + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{2m-1}}{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2m+1} - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m} - 2 \times \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m} \\ &= H_{2n+1} - H_n = x_n \end{aligned}$$

2.2.d. On déduit de ce qui précède que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell_n(2)$$

Corrigé de l'exercice — Posé à centrale

Envisageons plusieurs cas...

► Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.

► Si $0 < a < 1$, $0 < a^n < 1$ à partir d'un certain rang et la suite est stationnaire à zéro.

► Si $a > 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n$$

d'où, puisque $a^n - 1 < 0$,

$$(a^n - 1)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leq a$$

Comme $a > 1$, on déduit des croissances comparées que

$$\ell n(a^n - 1) = n \ell n(a) + \ell n(1 - a^{-n}) = n \ell n(a) + o(n)$$

d'où

$$(a^n - 1)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ell n(a^n - 1)} = e^{\ell n(a) + o(1)}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n - 1)^{1/n} = a$$

par continuité de l'exponentielle. On déduit alors du théorème d'encadrement que la suite de l'énoncé converge vers a .