

Problème

Autour de la constante d'Euler

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Les deux parties du problème ne sont pas indépendantes.

Partie 1 — Développement asymptotique de la série harmonique

La partie a pour but d'obtenir un développement asymptotique de H_n à deux termes.

1.1. Deux inégalités.

1.1.a. Etablir que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ell n(k+1) - \ell n(k) \leq \frac{1}{k}$$

1.1.b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell n(n+1) \leq H_n \leq \ell n(n) + 1$$

1.2. La constante d'Euler. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = H_n - \ell n(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ell n(n)$$

1.2.a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. On note γ leur limite commune, appelée constante d'Euler.

1.2.b. Etablir que $0 < \gamma < 1$.

1.2.c. Justifier que

$$H_n = \ell n(n) + \gamma + o(1)$$

Partie 2 — Application à la série harmonique alternée

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad y_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

2.1. Etude de $(x_n)_{n \geq 1}$. En utilisant les résultats de la partie 1, établir que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell n(2)$.

2.2. Etude de $(x_n)_{n \geq 1}$.

2.2.a. Montrer que $(y_{2n})_{n \geq 1}$ et $(y_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

2.2.b. En déduire que $(y_n)_{n \geq 1}$ converge.

2.2.c. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_{2n} = x_n$$

2.2.d. En déduire la limite de $(y_n)_{n \geq 1}$.

Exercice — Posé à centrale

Etudier la convergence de $(\lfloor a^n \rfloor^{1/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $a > 0$.