

L'INTÉGRALE DE GAUSS



OPTIMAL SUP-SPÉ
le n°1 en sup-spé

MATHS SPÉ - CONCOURS 2015

I. Partie I

- 1) (a) La fonction C_n est continue sur $[0, \pi]$ comme somme de fonctions qui le sont, et par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi C_n(x) dx &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos kx dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^\pi\end{aligned}\quad \text{et on peut donc conclure :}$$

$$\boxed{\int_0^\pi C_n(x) dx = \frac{\pi}{2}}$$

- (b) Comme $\cos 0 = 1$:

$$\boxed{C_n(0) = n + \frac{1}{2}}.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0, \pi], \quad 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) C_n(x) &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos kx \quad \text{soit d'après une formule classique :} \\ &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \left(\sin\left[\frac{(2k+1)x}{2}\right] - \sin\left[\frac{(2k-1)x}{2}\right] \right) \\ &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]\end{aligned}\quad \text{et donc, puisque } 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 :$$

$$\boxed{\forall x \in]0, \pi], \quad C_n(x) = \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$



Remarque

On aurait également pu remarquer ceci : $\cos kx$ n'est autre que la partie réelle de e^{ikx} , soit d'après la formule de MOIVRE, de $(e^{ix})^k$. Le réel x étant dans $]0, \pi]$, on a : $e^{ix} \neq 1$, ce qui permet d'appliquer un résultat du cours sur la somme des termes d'une suite géométrique. La technique de factorisation par les exponentielles moitiées (voir le POLYCOPIÉ **Nombres complexes**) permet alors de conclure sans difficulté. Ici, la connaissance du résultat permettait d'aller plus vite en utilisant la formule de trigonométrie $\cos a \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

- 2) (a) Commençons par remarquer que la fonction Φ_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions qui le sont, et que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, \pi], \Phi'_\lambda(x) &= \frac{-\lambda \sin(\lambda x) 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos(\lambda x) - 1) \times 2 \times \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{soit :} \\ &= \frac{-2\lambda \sin(\lambda x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos(\lambda x) - 1) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Idée pour continuer : le numérateur $N_\lambda(x)$ et le dénominateur $D_\lambda(x)$ ayant pour limite commune 0, on cherche à obtenir un équivalent de cette fraction lorsque x est au voisinage de 0. Le dénominateur étant équivalent à un monôme de degré 2 (car $\sin x \sim x$), un d.l. d'ordre 2 au numérateur sera suffisant pour obtenir un équivalent simple de la fraction. Mais avant de rechercher un d.l.(2) du numérateur, commençons par rechercher des équivalents de chaque terme.

Lorsque x est au voisinage de 0, $\frac{x}{2}$ et λx sont au voisinage de 0 ; on a donc :

$$\begin{aligned} - & -2\lambda \sin(\lambda x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\lambda^2 x^2 \\ - & -(\cos(\lambda x) - 1) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\lambda^2 x^2}{2}. \end{aligned}$$

Comme les deux termes qui constituent le numérateur sont équivalents à un monôme de même degré, et que la somme des coefficients correspondants ne s'annulent pas, on en déduit que le numérateur, noté $N_\lambda(x)$, vérifie :

$$N_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\lambda^2}{2} x^2.$$



Remarque

Il n'est pas toujours nécessaire d'employer des d.l. ! Il est exact que de façon générale, on ne somme pas deux équivalents. Mais lorsque $f(x) \sim ah(x)$ et que $g(x) \sim bh(x)$, et lorsque $a + b \neq 0$, alors il est non moins exact que $f(x) + g(x) \sim (a+b)h(x)$. En effet, on a alors : $f(x) = ah(x) + o(h(x))$, $g(x) = bh(x) + o(h(x))$, d'où $f(x) + g(x) = (a+b)h(x) + o(h(x))$. Comme $a + b \neq 0$, on peut alors écrire : $f(x) + g(x) = (a+b)h(x) + o((a+b)h(x))$, et finalement : $f(x) + g(x) \sim (a+b)h(x)$. Il n'est donc pas toujours nécessaire d'employer un d.l. en présence d'une somme d'équivalents. C'est seulement lorsque $a + b = 0$ que l'emploi des d.l. est nécessaire : en effet, dans ce cas, on a : $f(x) + g(x) = o(h(x))$, et dire que $f(x) + g(x)$ est négligeable devant $h(x)$ ne permet pas de déterminer un équivalent de $f(x) + g(x)$.

Comme : $N_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\lambda^2}{2} x^2$, alors :

$$\Phi'_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\lambda^2}{2}.$$



On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'_\lambda(x) = -\frac{\lambda^2}{2} \in \mathbb{R}.$$

Un calcul analogue au précédent, mais plus simple ce dernier, prouve que :

$$\Phi_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\lambda^2 x,$$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi_\lambda(x) = 0.$$

Comme $\Phi_\lambda(0) = 0$, on en déduit que Φ_λ est continue en 0 et donc sur $[0, \pi]$.

Finalement, comme :

- Φ_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0, \pi]$,
 - Φ_λ est continue sur le fermé $[0, \pi]$,
 - $\Phi'_\lambda(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0, égale à $-\frac{\lambda^2}{2}$,
- alors, d'après le *théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$* :

La fonction Φ_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$, et : $\Phi'_\lambda(0) = -\frac{\lambda^2}{2}$.



Point méthode

Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec "problème en a ", on utilise très souvent le *théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$* reproduit ci-dessous. Pour une généralisation on pourra se reporter au FOCUS **Prolongement d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$** .

Théorème. *Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Lorsque les trois conditions sont réunies :*

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$,
- f est continue sur $[a, b]$,
- f' admet une limite au point a , notée ℓ ,

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et : $f'(a) = \ell$.

- (b) Comme la fonction Φ_λ et la fonction qui à x associe $\frac{2}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors, en effectuant une intégration par parties :

$$\int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] dx = \left[\frac{2}{2n+1} \Phi_\lambda(x) \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \Phi'_\lambda(x) \frac{2}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx,$$

soit avec $\Phi_\lambda(0) = 0$, et par linéarité de l'intégration :

$$\int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] dx = \frac{2}{2n+1} \Phi_\lambda(\pi) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) - \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \Phi'_\lambda(x) \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx.$$

Or, la fonction Φ_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, donc Φ'_λ est continue sur le segment $[0, \pi]$, et donc, par continuité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$, la fonction $|\Phi'_\lambda|$ est également continue sur ce segment. Elle admet donc un maximum, noté M_λ , sur ce segment. Par une propriété de l'intégration, les bornes 0 et π étant ordonnées dans l'ordre croissant, on en déduit :

$$0 \leq \left| \int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] dx \right| \leq \frac{2\pi M_\lambda}{2n+1}.$$



Le *théorème de l'encadrement* permet de conclure que cette suite d'intégrales ci-dessus tend vers 0.

De même, par encadrement, on obtient sans difficulté :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n+1} \Phi_\lambda(\pi) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 0,$$

et l'on peut finalement conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] dx = 0$$



Point méthode

Pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales, on peut souvent procéder par encadrement. C'est seulement si cette méthode ne fonctionne pas qu'il y a alors lieu de voir si on peut appliquer un théorème d'intégration à terme, voir le POLYCOPIÉ **Suites et séries de fonctions**.



Rappel de cours

Toute fonction continue sur un fermé-borné est bornée et atteint ses bornes sur ce fermé-borné (pour les MP : toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes sur ce compact). Cette propriété fondamentale d'analyse est utile à la fois dans le cours sur les fonctions d'une variable et dans le cours sur les fonctions de plusieurs variables. Elle permet par exemple de montrer qu'une fonction polynomiale de plusieurs variables admet un minimum et un maximum globaux sur un ensemble fermé-borné.

- 3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, on peut écrire :

$$\forall x \in [0, \pi], \cos(\lambda x) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((\lambda+n)x) + \cos((\lambda-n)x)),$$

et donc, les fonctions en présence étant continues sur $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} u_n(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((\lambda+n)x) dx + \cos((\lambda-n)x)) dx && \text{soit, puisque } \lambda \notin \mathbb{Z} : \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((\lambda+n)x)}{\lambda+n} + \frac{\sin((\lambda-n)x)}{\lambda-n} \right]_0^\pi && \text{soit, puisque } \sin 0 = 0 : \\ &= \frac{(\lambda-n) [\sin(\lambda\pi) \cos(n\pi) + \cos(\lambda\pi) \sin(n\pi)] + (\lambda+n) [\sin(\lambda\pi) \cos(n\pi) - \cos(\lambda\pi) \sin(n\pi)]}{2(\lambda^2 - n^2)} \\ &= \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi) \cos(n\pi)}{2(\lambda^2 - n^2)} && \text{et comme } \cos(n\pi) = (-1)^n : \\ &= \frac{(-1)^n \lambda \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - n^2} \end{aligned}$$

On peut conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - n^2}$$

- (b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, n > \lambda, |u_n(\lambda)| = \frac{\lambda \sin(\lambda\pi)}{n^2 - \lambda^2}$; on en déduit que :



$$|u_n(\lambda)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\lambda \sin(\lambda\pi)|}{n^2}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de RIEMANN avec $2 > 1$), alors la série de terme général $\frac{|\lambda \sin(\lambda\pi)|}{n^2}$ converge, et donc, d'après les *critères de comparaison des séries à termes réels positifs* : la série de terme général $|u_n(\lambda)|$ converge. Ainsi, la série de terme général $u_n(\lambda)$ est absolument convergente, et donc, s'agissant d'une série à termes réels :

La série de terme général $u_n(\lambda)$ converge

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégration, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k(\lambda) &= \int_0^\pi \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n \cos(kx) \, dx \\ &= \int_0^\pi \cos(\lambda x) \left(C_n(x) - \frac{1}{2} \right) \, dx \\ &= \int_0^\pi \cos(\lambda x) C_n(x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(\lambda x) \, dx \\ &= \int_0^\pi (\cos(\lambda x) - 1) C_n(x) \, dx + \int_0^\pi C_n(x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(\lambda x) \, dx \\ &= \int_0^\pi (\cos(\lambda x) - 1) C_n(x) \, dx + \int_0^\pi C_n(x) \, dx - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, \pi], (\cos(\lambda x) - 1) C_n(x) &= \frac{\cos(\lambda x) - 1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] \\ &= \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]. \end{aligned} \quad \text{soit :}$$

Le cas $x = 0$ rejoint le cas général car $\Phi_\lambda(0) = 0$, et, la fonction Φ_λ étant continue sur $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] \, dx = \int_0^\pi (\cos(\lambda x) - 1) C_n(x) \, dx.$$

On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k(\lambda) = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] \, dx + \int_0^\pi C_n(x) \, dx$$



Attention !

Avant de remplacer $(\cos(\lambda x) - 1)C_n(x)$ par $\Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]$ à l'intérieur de l'intégrale, il fallait justifier que ces deux quantités étaient aussi égales en 0 et rappeler la continuité de la fonction Φ_λ , qui a été précédemment démontrée.

(d) Comme la série de terme général $u_n(\lambda)$ converge, que la suite $\left(\int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right] \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $\left(\int_0^\pi C_n(x) \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ alors, par passage à la limite dans la relation précédente, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient :



$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\lambda) = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{\pi}{2},$$

soit d'après le résultat de la question **3a** et remplaçant la variable muette k par n :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda \sin(\lambda\pi)}{n^2 - \lambda^2} = -\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{\pi}{2},$$

et on peut finalement conclure, en multipliant par $\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}.$$

II. Partie II

- 1) (a) En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(-t)^\alpha \neq 1$ ($t \in [0, 1]$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} &= \frac{1 - (-t)^{(n+1)\alpha}}{1 - (-t^\alpha)} \\ &= \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} \quad \text{et l'on peut donc conclure :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} = \frac{1}{1 + t^\alpha} - (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha}}$$

- (b) Idée : Pour trouver la réponse à cette question, deux éléments peuvent nous mettre sur la voie : d'une part, la présence de l'intégrale. Une intégrale n'apparaît pas "toute seule", il s'agit de la faire apparaître. D'autre part, on peut savoir que $\frac{1}{n+1}$ n'est autre que $\int_0^1 t^n dt$, et adapter ce résultat à la situation.

On peut écrire, par linéarité de l'intégrale, toutes les fonctions en présence étant continues sur $[0, 1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha} dt = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^\alpha} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt,$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1} = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^\alpha} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt.$$

Pour passer à la limite, on procède de nouveau par encadrement de l'intégrale. Les bornes 0 et 1 étant ordonnées dans l'ordre croissant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt \right| \leq \int_0^1 t^{(n+1)\alpha} dt,$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)\alpha + 1}.$$

Le *théorème de l'encadrement* nous permet d'en déduire que la suite $\left((-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Par passage à la limite dans la relation précédente, en faisant tendre n vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1} = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^\alpha} dt$, ce qui permet de conclure que :



La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n\alpha + 1}$ converge, et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$

- 2) (a) Notons $f_{a,b}$ la fonction qui à tout réel t associe $\frac{t^a}{1+t^\alpha} e^{-x b t^\alpha}$. La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$, le problème éventuel ne se pose donc qu'en $+\infty$, où l'on a : $|f_{a,b}(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{a-\alpha} e^{-x b t^\alpha}$. Plusieurs cas se présentent :
- Si $x > 0$: on a alors, par croissances comparées : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times t^{a-\alpha} e^{-x b t^\alpha} = 0$, et donc : $t^{a-\alpha} e^{-x b t^\alpha} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. D'après les *critères de comparaison des intégrales de fonctions positives*, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-\alpha} e^{-x b t^\alpha} dt$ converge. Le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives prouve finalement que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge absolument. La fonction $f_{a,b}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Si $x = 0$: on a alors : $f_{a,b}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{a-\alpha}$, et donc, en reconnaissant une intégrale de RIEMANN, on peut alors écrire que la fonction $f_{a,b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, $a < \alpha - 1$.
 - Si $x < 0$: on a alors : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{a,b}(t) = +\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ diverge. La fonction $f_{a,b}$ n'est alors pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut finalement conclure, la distinction demandée par l'énoncé portant sur a , que :

L'ensemble des valeurs de x telles que la fonction qui à t associe $t^{a-\alpha} e^{-x b t^\alpha}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\mathbb{R}_+$ si $a < \alpha - 1$, et $\mathbb{R}_+^*$ sinon.

- (b) La fonction qui à t associe $\frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et, de même que précédemment, son expression, qui est positive, est négligeable devant $\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$. Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, les *critères de comparaison des intégrales de fonctions positives* nous permettent de conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ est absolument convergente, et donc :

La fonction qui à t associe $\frac{1}{1+t^\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (c) La fonction qui à u associe $u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, bijective de $[1, +\infty[$ dans $]0, 1]$, en effectuant le changement de variable $t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $dt = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} du$ dans l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha} \int_1^0 \frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} du && \text{soit en factorisant par } u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} : \\
 &= \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1}{u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + 1} du && \text{i.e. :} \\
 &= \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} du.
 \end{aligned}$$



Rappel de cours

Changement de variable dans une intégrale impropre. Si la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, et bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, alors le changement de variable $t = \phi(u)$, $dt = \phi'(u) du$ est licite dans l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$, fût-elle impropre. Ce changement de variable assure que les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(u)) du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence. Noter que le caractère bijectif de la fonction ϕ n'est pas requis lorsqu'il s'agit d'intégrales de fonctions continues sur un segment.

Finalement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

- (d) Par linéarité de l'intégration, l'intégrale $\int_0^{+\infty}$ étant convergente, on a : $J(\alpha) = g(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.
D'après le résultat de la question **II.1.b**, on peut écrire :

$$J(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{n\frac{\alpha}{\alpha-1}+1} \right) \right].$$

Or, on a :

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{n\frac{\alpha}{\alpha-1}+1} \right) = \frac{1}{(n+1)\alpha-1},$$

et donc :

$$J(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\alpha-1}.$$

On en déduit, en effectuant le changement d'indice $n' = n+1$ dans la seconde somme, que :

$$J(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha-1}.$$

En isolant le terme en $n=0$ de la première somme puis en regroupant les deux sommes par linéarité, il vient alors :

$$J(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n\alpha+1} - \frac{1}{n\alpha-1} \right],$$

$$J(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n\alpha+1} - \frac{1}{n\alpha-1} \right]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{-2}{(n\alpha)^2 - 1} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{2 \times \frac{1}{\alpha}}{n^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} - \alpha \right]$$

soit, d'après **I.3.d** avec $\lambda = \frac{1}{\alpha}$:

et l'on peut enfin conclure :



$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

**Remarque**

Le résultat démontré dans ce problème, à savoir : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$ est relativement classique aux concours, il peut être utile de connaître la valeur de cette intégrale. On retiendra aussi la méthode consistant à couper cette intégrale en deux, puis à effectuer un changement de variable dans la seconde intégrale permettant de revenir aux bornes de la première.