

15. L'intégrale de Gauss

Maths SPE - Filières PC/PC* et PT/PT*

OPTIMAL SUP-SPE - Concours 2015

Partie I

Dans toute cette partie, λ désigne un réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note C_n la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi], C_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

a) Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi C_n(x) dx$.

b) Calculer $C_n(0)$, et préciser la valeur de $C_n(x)$ lorsque $x \in]0, \pi]$.

2) Soit Φ_λ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \pi], \Phi_\lambda(x) = \frac{\cos(\lambda x) - 1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \Phi_\lambda(0) = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer à l'aide d'un théorème que l'on citera précisément que Φ_λ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

b) Déterminer, la limite de la suite $\left(\int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right] dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Soit $(u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\lambda) = \int_0^\pi \cos(\lambda x) \cos(nx) dx$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda \sin(\lambda \pi)}{\lambda^2 - n^2}$.

b) En déduire que la série de terme général $u_n(\lambda)$ converge.

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k(\lambda) = -\frac{\sin(\lambda \pi)}{2\lambda} + \int_0^\pi \Phi_\lambda(x) \sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right] dx + \int_0^\pi C_n(x) dx.$$

d) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\lambda(-1)^{n+1}}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda \pi)} - \frac{1}{\lambda}.$$

Partie II

1) Soit α un réel strictement positif.

a) Vérifier rapidement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} = \frac{1}{1+t^\alpha} - (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.$$

b) En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n\alpha + 1}$ converge et que $g(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ vérifie :

$$g(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1}.$$

2) On suppose désormais que α est strictement supérieur à 1.

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^*$. Déterminer en fonction de a l'ensemble des réels x tels que la fonction $t \mapsto \frac{t^a}{1+t^\alpha} e^{-x b t^\alpha}$

soit intégrable sur $\mathbb{R}^*$. Lorsque cette fonction est intégrable, on note $I(a, b, \alpha)$, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^\alpha} e^{-x b t^\alpha} dt$

b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^*$. On note $J(\alpha)$, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

c) En posant $t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} g\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right).$$

d) Déterminer alors une expression simple de $J(\alpha)$ en fonction de $\frac{\pi}{\alpha}$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$.