

Partie I
Étude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

Pour tous i, j , $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$, donc $|(AB)_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

et la passage au max entraîne que $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

2. (a) $N(X) \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} N(E_i^j) \right) \|X\|_\infty$.

Soit $X = \sum_{i,j} x_{i,j} E_i^j$, du fait que $\forall i, j, |x_{i,j}| \leq \|X\|_\infty$, on obtient,

$$N(X) \leq \sum_{i,j} |x_{i,j}| N(E_i^j) \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} N(E_i^j) \right) \|X\|_\infty.$$

Posons pour la suite $k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} N(E_i^j)$.

(b) i. $N : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ est continue.

Soit $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y) \leq k \|X - Y\|_\infty$, donc N est k -lipchitzienne et par suite elle est continue.

ii. **Existence de X_0 tel que $\forall X \in S_\infty, N(X_0) \leq N(X)$.**

L'application N est continue sur la sphère S_∞ qui est compacte comme fermé borné en dimension finie, donc N est bornée et atteint sa borne inférieure sur S_∞ , ce qui assure l'existence de $X_0 \in S_\infty$ tel que $\min_{X \in S_\infty} N(X) = N(X_0)$, et par suite $\forall X \in S_\infty, N(X) \geq N(X_0)$.

iii. **Existence de $\alpha > 0$ tel que $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq N$.**

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul, alors $\frac{X}{\|X\|_\infty} \in S_\infty$, donc $N\left(\frac{X}{\|X\|_\infty}\right) \geq N(X_0)$ et par suite

$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, N(X) \geq N(X_0) \|X\|_\infty$ inégalité encore vérifiée pour $X = O_n$.

$\alpha = N(X_0)$ est strictement positif du fait que $\|X_0\|_\infty = 1$.

(c) **Toutes les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.**

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on vient de montrer que $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq N \leq k \|\cdot\|_\infty$, donc toute norme N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ et par transitivité, toutes les normes seront équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. (a) **Existence de $\beta > 0$ tel que $N(AB) \leq n\beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.**

$N \sim \|\cdot\|_\infty$, donc $\exists \beta > 0$ tel que $N \leq \beta \|\cdot\|_\infty$, ce qui donne par l'inégalité de la question 1,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), N(AB) \leq \beta \|AB\|_\infty \leq n\beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

(b) **Existence de α .**

De la question c, qui précède, on $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq N$, donc avec l'inégalité précédente, on aura $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leq n \frac{\beta}{\alpha^2} N(A) N(B).$$

(c) **Existence de $\gamma > 0$ tel que γN est une norme sous-multiplicative.**

Le réel $\gamma = \frac{n\beta}{\alpha^2}$ répond à la question.

4. (a) i. **Existence de $\|A\|$.**

L'application $X \mapsto AX$ est continue comme application linéaire en dimension finie, donc $\exists k > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), N(AX) \leq k N(X)$, donc l'application $X \mapsto \frac{N(AX)}{N(X)}$ est bornée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, ce qui assure l'existence de $\|A\|$.

ii. $\|A\| = \sup_{X/N(X)=1} N(AX).$

Notons S_N la sphère unité associée à N .

L'inclusion $S_N \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ entraîne que $\sup_{X \in S_N} N(AX) \leq \|A\|$.

Réciproquement si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $Y = \frac{X}{N(X)} \in S_N$, donc $\frac{N(AX)}{N(X)} = N(AY) \leq \sup_{X \in S_N} N(AX)$, ce qui donne par passage au sup, $\|A\| \leq \sup_{X \in S_N} N(AX)$.

iii. $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\|A\| = 0$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0$, en particulier $Ae_i = 0$ pour tout vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc les colonnes de A sont nulles, et par suite $A = O_n$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\|\lambda A\| = \sup_{X \in S_N} \{N(\lambda AX)\} = \sup_{X \in S_N} \{|\lambda|N(X)\} = |\lambda| \sup_{X \in S_N} \{N(AX)\} = |\lambda| \|A\|$.

- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\forall X \in S_N$, $N((A+B)X) = N(AX + BX) \leq N(AX) + N(BX) \leq \|A\| + \|B\|$ et par passage au sup, on obtient $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(b) i. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq \|A\|N(X)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, alors $Y = \frac{X}{N(X)} \in S_N$, donc $\frac{N(AX)}{N(X)} = N(Y) \leq \|A\|$ et par suite $N(AX) \leq \|A\|N(X)$, inégalité encore vraie pour $X = 0$, on conclut que $N(AX) \leq \|A\|N(X)$.

ii. Dédire que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(ABX) \leq \|A\|N(BX) \leq \|A\|\|B\|N(X)$, donc

$$\|AB\| = \sup_{X \neq 0} \frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \|A\|\|B\|.$$

Partie II Suites de matrices

1. $(A_m)_m$ converge vers A ssi, $(a_{i,j}^{(m)})_m$ converge vers $a_{i,j}$ pour tous i, j .

$\lim A_m = A$ ssi, $\|A_m - A\|_\infty \rightarrow 0$ ssi, $\max_{i,j} |a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \rightarrow 0$ ssi, $\forall i, j$, $|a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \rightarrow 0$ ssi, $\forall i, j$, $a_{i,j}^{(m)} \rightarrow a_{i,j}$.

2. (a) Existence de C_m et θ_m .

On pose $C_m = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}}$, on a $\frac{1}{C_m^2} + \frac{\alpha^2/m^2}{C_m^2} = 1$, donc $\exists \theta_m \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\frac{1}{C_m} = \cos(\theta_m)$ et $\frac{\alpha/m}{C_m} = \sin(\theta_m)$, d'où $A_m = C_m \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} = C_m R(\theta_m)$ où on a posé pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

(b) La limite de $(A_m)_m$.

$A_m^m = C_m^m R(m\theta_m)$, or $C_m^m = \exp\left(\frac{m}{2} \ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right) \rightarrow 1$ et $\theta_m = \arcsin\left(\frac{\alpha}{mC_m}\right) \sim \frac{\alpha}{mC_m} \sim \frac{\alpha}{m}$, donc par continuité des fonctions cosinus et sinus, on obtient $A_m^m \rightarrow R(\alpha)$.

Partie III Séries de matrices

1. $\sum A_m$ converge ssi, $\forall i, j$, $\sum a_{i,j}^{(m)}$ converge.

$S_m = \sum_{k=0}^m A_k$, donc $\forall i, j$, $(S_m)_{i,j} = \sum_{k=0}^m a_{i,j}^{(k)}$ et la question 1 de la partie II assure l'équivalence

$\sum_m A_m$ converge ssi, $\sum_m a_{i,j}^{(m)}$ pour tous i, j .

2. Toute série absolument convergente est convergente.

$\forall i, j$, $|a_{i,j}^{(m)}| \leq \|A_m\|_\infty$ et $\sum_m \|A_m\|_\infty$ converge, donc par comparaison, $\forall i, j$, $\sum_m |a_{i,j}^{(m)}|$ converge et puisque

$\mathbb{K}$ est complet $\forall i, j$, $\sum_m a_{i,j}^{(m)}$ converge, c'est à dire $\sum_m A_m$ converge.

3. Si la série $\sum_m A^m$ converge, sa somme est inversible d'inverse $I_n - A$.

Soit $B = \sum_{m=0}^{+\infty} A^m$, alors par continuité de l'application $M \mapsto AM$, comme application linéaire en dimension

finie, on obtient $AB = \sum_{m=0}^{+\infty} A^{m+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} A^m = B - I_n$, donc

$(I_n - A)B = I_n$, donc B est inversible d'inverse $I_n - A$.

4. (a) **Convergence de $\sum_m B^m$ est valeur de sa somme.**

$\chi_B = (X - 1/2)(X + 1/3)$, de plus $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc

$B = P \cdot \text{diag}(1/2, -1/3) \cdot P^{-1}$ et par suite $B^m = P \cdot \text{diag}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^m, \left(-\frac{1}{3}\right)^m\right) \cdot P^{-1}$ et par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, la série $\sum_m B^m$ converge de somme $P \cdot \text{diag}(2, \frac{3}{4}) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 13/4 & -5/4 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(b) **Inverse de la série $\sum_{m=0}^{+\infty} B^m$.**

Son inverse est $I_n - B = \begin{pmatrix} -9/4 & 5/4 \\ -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Partie IV Exponentielle d'une matrice

1. **La série $\sum_m \frac{1}{m!} A^m$ est convergente.**

$\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, donc $\forall m \geq 1, \|\frac{1}{m!} A^m\| \leq \frac{1}{m!} \|A\|^m$ et la série $\sum_m \frac{1}{m!} \|A\|^m$ converge vers $e^{\|A\|}$,

donc par comparaison la série $\sum_m \frac{1}{m!} A^m$ est convergente comme série absolument convergente.

2. **Calcul de $\exp(S)$ en fonction de I_n et de S .**

$$\exp(S) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!} S^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} S^{2m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!} I_n + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} S = \cosh(1) I_n + \sinh(1) S.$$

3. (a) **Si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.**

Notons $S_m(A) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $S_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ pour sa somme.

La condition $AB = BA$ nous permet d'utiliser la formule du binôme et on le calcul suivant :

$$\begin{aligned} S_m(A)S_m(B) - S_m(A+B) &= \left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} A^j \right) \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^k \right) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j A^j B^{k-j} = \\ &= \left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} A^j \right) \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^k \right) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=j}^m \frac{1}{j!} A^j \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} A^j \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} B^k - \sum_{k=j}^m \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{m-j} \frac{1}{j!} A^j \frac{1}{k!} B^k, \text{ donc } \|S_m(A)S_m(B) - S_m(A+B)\| \leq S_m(\|A\|)S_m(\|B\|) - S_m(\|A\| + \|B\|) \rightarrow \\ &\rightarrow e^{\|A\|} e^{\|B\|} - e^{\|A\| + \|B\|} = 0 \text{ et par suite } S_\infty(A+B) = S_\infty(A)S_\infty(B), \text{ c'est à dire } \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B). \end{aligned}$$

(b) **$\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.**

la formule précédente entraîne que $\exp(-A)\exp(A) = \exp(O_n) = I_n$, donc $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.

4. (a) **Exponentielle d'une matrice diagonale.**

$\frac{1}{m!} (\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^m = \text{diag}\left(\frac{1}{m!} \alpha_1^m, \dots, \frac{1}{m!} \alpha_n^m\right)$, les séries composantes sont convergentes, donc $\exp(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \text{diag}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n})$.

(b) **$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.**

$$\exp(P^{-1}AP) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} (P^{-1}AP)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} P^{-1}A^mP \text{ et par continuité de l'application } M \mapsto P^{-1}MP,$$

$$\text{on aura } \exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m \right) P = P^{-1} \exp(A) P.$$

(c) **Exponentielle d'une matrice triangulaire.**

$$\text{Soit } T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & (*) \\ & \ddots & \\ O & & t_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ alors } \frac{1}{m!} T^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{m!} t_{1,1}^m & & (**) \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{m!} t_{n,n}^m \end{pmatrix}, \text{ donc } \exp(T) = \begin{pmatrix} e^{t_{1,1}} & & (\diamond) \\ & \ddots & \\ O & & e^{t_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

(d) $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et par suite $\exists T = (t_{i,j})_{i,j}$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PTP^{-1}$, donc $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$ d'où $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) =$

$$\prod_{i=1}^n e^{t_{i,i}} = e^{\sum_{i=1}^n t_{i,i}} = e^{\text{tr}(T)} = e^{\text{tr}(A)}.$$

5. **Calcul de $\exp(tA)$.**

$\chi_A = (X - 2)^3$, donc par Cayley-Hamilton $A - 2I_3$ est nilpotente.

$$\exp(tA) = \exp(2tI_3) \cdot \exp(t(A - 2I_3)) = e^{2t}(I_3 + t(A - 2I_3) + \frac{t^2}{2!}(A - 2I_3)^2) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & t & t \\ 6t + 2t^2 & 1 + 2t + t^2 & 2t + t^2 \\ -10t - 2t^2 & -4t - t^2 & 1 - 4t - t^2 \end{pmatrix}.$$