

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un problème.

Durée : 4 heures

Problème

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre, c'est-à-dire $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau et $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, tel que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y) = \alpha \cdot (x \times y)$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{A}$, $\|\cdot\|$ est appelée une norme sous-multiplicative de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$, si pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}^2, \|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$. Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls, on rappelle que, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Si $n = p$, alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on rappelle aussi que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de ses opérations usuelles, est une $\mathbb{K}$ -algèbre. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = AA^n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I

Etude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme notée $\|\cdot\|_\infty$, telle que $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} (|a_{i,j}|).$$

1. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

2. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) On pose $(E_i^j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $X = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $N(X) \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} N(E_i^j) \right) \|X\|_\infty$.

b) i) Montrer que N est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

ii) On pose $S_\infty = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \|X\|_\infty = 1\}$. Montrer qu'il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $X \in S_\infty, N(X_0) \leq N(X)$.

iii) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \alpha \|X\|_\infty \leq N(X)$.

c) En déduire que toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

3. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif β tel que $N(AB) \leq n\beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

b) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $N(AB) \leq n \frac{\beta}{\alpha^2} N(A)N(B)$.

c) En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que γN soit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose,
- $$\|A\| = \sup \left\{ \frac{N(AX)}{N(X)}; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\}.$$
- Justifier, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.
 - Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \sup \{N(AX); X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\}$.
 - Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq \|A\|N(X)$.
 - En déduire que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Partie II

Suites de matrices

On rappelle que si $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers A si la suite réelle $(\|A_m - A\|)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, où $\|\cdot\|$ est une norme donnée sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit dans ce cas $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = A$.

- Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{i,j}^{(m)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.
Montrer que la suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, la suite $(a_{i,j}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.
En cas de convergence, on écrit $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(m)} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

- Soit α un réel, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_m \in \mathbb{R}$ et $\theta_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tels que,

$$A_m = C_m \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}$$

- Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m^m$.

Partie III

Séries de matrices

Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour $m \in \mathbb{N}$, $S_m = \sum_{k=0}^m A_k$. On dit que la série de terme général A_m converge si la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, sinon la série est dite divergente. En cas de convergence, la limite de la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ se note $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k$.

On dit que la série de terme général A_m est absolument convergente, si la série numérique de terme général $N(A_m)$ converge, avec N une norme définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{i,j}^{(m)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.
Montrer que la série de terme général A_m converge si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, la série de terme général $a_{i,j}^{(m)}$ converge. En cas de convergence, on écrit $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(m)} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.
- Montrer que toute série absolument convergente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est convergente.
- Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\sum_{m \in \mathbb{N}} A^m$ converge, montrer que $\sum_{m=0}^{+\infty} A^m$ est inversible et déterminer son inverse.
- On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $\sum_{m \in \mathbb{N}} B^m$ est convergente et déterminer sa valeur.
- b) En déduire l'inverse de $\sum_{m=0}^{+\infty} B^m$.

Partie IV

Exponentielle d'une matrice

1. Montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série de terme général $\frac{1}{m!}A^m$, $m \in \mathbb{N}$, est convergente. Par la suite, on appelle l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice notée $\exp(A)$, telle que $\exp(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}A^m$.

Dans toute la suite du problème, on note $\exp$ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I_n$. Déterminer $\exp(S)$ en fonction de I_n et de S .
3. a) Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
- b) En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est une matrice inversible et déterminer son inverse en fonction de A .
4. On note, pour tout $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$, $\text{diag}(\beta_i)_{1 \leq i \leq n}$, la matrice diagonale $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i} = \beta_i$.
- a) Montrer que $\forall (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\text{diag}(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}) = \text{diag}(e^{\alpha_i})_{1 \leq i \leq n}$
- b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.
- c) Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, montrer que $\exp(T) = (t'_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est aussi une matrice triangulaire supérieure telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $t'_{i,i} = e^{t_{i,i}}$.
- d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$, où $\text{Tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A .

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, pour tout réel t , déterminer $\exp(tA)$.