

Remarque : Pour ne pas confondre l'ensemble F et la fonction F , de préférence on désigne par G la fonction définie par $G(x) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$. cela étant.

Q1. Questions préliminaires

- a/ Si f est positive sur $[a, +\infty[$ alors il y'a équivalence entre les propositions (i) et (ii).
b/ Si non (i) $\implies$ (ii) seulement. Pour plus de détail voir la question 10) a) et b).

PARTIE I : Exemples et propriétés

Q2. a/ • Tout d'abord $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

- l'application $t \mapsto 0$ est un élément de E , donc $E \neq \emptyset$.
- Soient $(f, g, \lambda) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$ et $x > 0$ alors $t \mapsto f(t) + \lambda g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ de plus $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)e^{-xt} + \lambda g(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-xt}| + |\lambda||g(t)e^{-xt}|$, et $t \mapsto |f(t)e^{-xt}| + |\lambda||g(t)e^{-xt}|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par comparaison $x \mapsto f(t)e^{-xt} + \lambda g(t)e^{-xt}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^+$. Donc $f + \lambda g \in E$.

- b/ • Il est évident que $F \subset E$ car $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- L'application $x \mapsto 0$ est un élément de F , donc $F \neq \emptyset$.
- Soient $(f, g, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}$, $\exists M_1, M_2$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq M_1$ et $|g(x)| \leq M_2$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x) + \lambda g(x)| \leq M_1 + |\lambda|M_2$ et $f + \lambda g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $f + \lambda g \in F$.

- c/ Soit $f \in E$, montrons que $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit donc $x > 0$ l'application $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est convergente, ainsi $\mathcal{L}(f)$ est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
La linéarité de $\mathcal{L}$ est évidente.

Q3. a/ $\forall x > 0, \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}$.

- b/ h_λ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x > 0; e^{-(x+\lambda)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en 0 la fonction $t \mapsto e^{-(x+\lambda)t}$ est continue $[0, 1]$ donc $h_\lambda \in E$, de plus $\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{x + \lambda}$.

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0, t^n e^{-\frac{xt}{2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\exists A > 0, \forall t \geq A; t^n e^{-\frac{xt}{2}} \leq 1$, donc $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$.

- g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- On a $\frac{x}{2} > 0$, et $f \in E$, donc $t \mapsto f(t)e^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par comparaison l'application $t \mapsto t^n e^{-xt} f(t) = g_n(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $g_n \in E$.

Q5. Transformée de Laplace d'une dérivée f est croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, donc $f' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, donc pour montrer que $f' \in E$, il suffit de montrer que $A \mapsto \int_0^A f'(t)e^{-xt}dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Soit $A \geq 0$ et $x > 0, \int_0^A f'(t)e^{-xt}dt = f(A)e^{-xA} - f(0) + x \int_0^A f(t)e^{-xt}dt$.

L'application $A \mapsto \int_0^A f(t)e^{-xt}dt$ admet une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$ car $f \in E$ et f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(A)e^{-xA} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0$ par suite $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Q6. Régularité d'une transformée de Laplace

- a/ Soit $x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$, posons $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; (x, t) \mapsto f(t)e^{-xt}$.

- $\forall x > 0; t \mapsto g(x, t)$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $f \in E$.
- $\forall t \geq 0; x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de plus $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt} = -g_1(t)e^{-xt}$, or $g_1 \in E$, donc $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $\alpha > 0$. On a $\forall x \in [\alpha, +\infty[; \forall t \geq 0; \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |tf(t)e^{-\alpha t}|$, et $t \mapsto tf(t)e^{-\alpha t} = g_1(t)e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$.

- b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la propriété suivante : $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$. Montrons P_n par récurrence : Pour $n = 1$ c'est la question 6 a).
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété est vraie à l'ordre n , montrons la propriété P_{n+1} .
 Puisque $g_n \in E$ en appliquant 6 a) $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc $\mathcal{L}(f)^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n+1)} = -(-1)^n \mathcal{L}(f_n)$ où $f_n : t \mapsto t g_n(t) = t^{n+1} f(t) = g_{n+1}(t)$ et le résultat en découle, et $\forall x > 0; \mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)(x)$.

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

- Q7.** a/ Soit $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq M$, donc $\forall x > 0, |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \frac{M}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
- b/ f' est bornée et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $f' \in F$, de la question précédente, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$.
 $f \in F$, donc bornée et de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut appliquer la question 5) puisque $F \subset E$, par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.
- Q8.** **Théorème de la valeur finale**
- a/ • f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
 • $\exists A > 0$ tel que $\forall t \geq A; |f(t) - \ell| \leq 1$, donc f est bornée sur $[A, +\infty[$, f est continue sur $[0, A]$ qui est compact donc f est bornée aussi sur $[0, A]$ si on pose $M_1 = \sup_{[A, +\infty[} |f(t)|$ et $M_2 = \sup_{[0, A]} |f(t)|$ et $M = \max(M_1, M_2)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}^+; |f(t)| \leq M$. Ainsi $f \in F$.
- b/ Le changement $a_n t = x$ de variable dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} h_n(t) dt$ et le fait que $\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq 0$ donne le résultat.
- c/ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = e^{-x} \ell$ car $\frac{x}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$
 • L'application $x \mapsto e^{-x} \ell$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 • De la question précédente f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+; |f(t)| \leq M$, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+; |h_n(x)| \leq M e^{-x}$, et l'application $t \mapsto M e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 • On peut appliquer le théorème de convergence dominée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt = \ell \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \ell$.
- d/ La suite $(a_n \mathcal{L}(f)(a_n))_n$ admet une limite en $0 \in]0, +\infty[$ et ceci pour toute suite $(a_n)_n$ qui converge vers 0, alors de la caractérisation séquentielle de la limite, l'application $x \mapsto x \mathcal{L}(f)(x)$ admet une limite en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.
 Si $\ell \neq 0$, alors $x \mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ell$, ainsi $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}$.
- Q9.** a/ On a $\forall x \in \mathbb{R}^+; R(x) = \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt$, f étant continue donc R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+; R'(x) = -f(x)$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$ donc R est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $R \in F \subset E$.
 Soit $x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt = - \int_0^{+\infty} R'(t) e^{-xt} dt$.
 Si $B > 0$, alors $\int_0^B R'(t) e^{-xt} dt = R(B) e^{-xB} - R(0) + x \int_0^B R(t) e^{-xt} dt \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} -R(0) + x \int_0^{+\infty} R(t) e^{-xt} dt$
 D'où $\forall x > 0; \mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x \int_0^{+\infty} R(t) e^{-xt} dt = R(0) - x \mathcal{L}(R)(x)$
- b/ On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$, donc $\exists A > 0$ tel que $\forall t \geq A, |R(t)| \leq \varepsilon$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x\mathcal{L}(R)(x)| \\
 &\leq x \int_0^A |R(t)|e^{-xt} dt + x \int_A^{+\infty} |R(t)|e^{-xt} dt \\
 &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \\
 &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon
 \end{aligned}$$

c/ $\exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[; x \int_0^A |R(t)| dt \leq \varepsilon$. donc $\forall x \in]-\alpha, \alpha[; |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon$. ainsi $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = R(0)$.

Q10.

a/ En prenant $x \mapsto 1 - \cos x$ comme primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ alors, posons $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de plus

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \\
 &= \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt
 \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $t \mapsto 1 - \cos t$ est bornée sur $[1, +\infty[$, de plus $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 , donc $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par conséquent G admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.

b/ Le changement de variable $t = n\pi + u$, donne :

$$\begin{aligned}
 \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u + n\pi} du \\
 &\geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin u du \\
 &\geq \frac{2}{(n+1)\pi}
 \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{(n+1)\pi}$ est divergente, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ aussi, par suite l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente. Alors la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

c/

$$\begin{aligned}
 \int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt &= \operatorname{Im} \int_0^X e^{it} e^{-xt} dt \\
 &= \operatorname{Im} \int_0^X e^{(i-x)t} dt \\
 &= \operatorname{Im} \frac{1}{i-x} (e^{(i-x)X} - 1) \\
 &= \frac{-1}{1+x^2} (e^{-xX} (x \sin X + \cos X) - 1)
 \end{aligned}$$

$\forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+; |(\sin t)e^{-xt}| \leq e^{-xt}$ et $e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par comparaison $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ qui est continue en 0 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus en faisant tendre X vers $+\infty$ dans la formule précédente on obtient : $\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}$

d/ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, bornée sur $[1, +\infty[$, donc f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et $e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ alors $f \in E$

De la question 6) $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$.

$$\text{Soit } x > 0, \mathcal{L}(f)'(x) = - \int_0^{+\infty} t \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt = - \frac{1}{1+x^2}$$

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \lambda - \arctan x$

La question 7) donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$, donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

De la question 9) on a montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell$,

D'après la question 10.b) fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc on ne peut pas appliquer le résultat de 9.

Mais dans la démonstration de 9. on a utiliser seulement le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$ et ceci est vrai ici même si f n'est pas intégrable.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}}.$

FIN DE L'ÉPREUVE

Lycée technique TAZA