

Problème

AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E , on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt .$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
- (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

PARTIE I : Exemples et propriétés

- 2. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
- (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- (c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- 3. (a) On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
- (b) Soit $\lambda \geq 0$ réel. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
 Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
 En déduire que g_n est un élément de E .

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit f dans E de classe C^1 , croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) .$$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

- (a) Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.
 (b) Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de LAPLACE

Dans toute cette partie, f est un élément de E .

7. On suppose dans cette question que f est dans F .

(a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

(b) *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. Théorème de la valeur finale

On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

(a) Démontrer que f appartient à F .

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

(d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

- (a) Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R' .
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
- (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$$

- (c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

PARTIE III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

- (a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.
- (b) En considérant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- (c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1) .$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt$.

- (d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ .
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) :

Lorsque f dans E vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question 9, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé