

PROBLÈME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

Dans tout le problème :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.

On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :

$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
 - a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 - b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
 - c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
 - d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $] -1, 1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Exemple

Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II. THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

a. Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que :

pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et

que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple*

Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$ puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application*

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$ pour $n \geq 1$).

b. Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel,

$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Tournez la page S.V.P.

III. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition (Q) à la condition (P_2) de telle sorte que si (a_n) vérifie (P_2) et (Q) , alors elle vérifie (P_1) .

9. On prend pour (Q) la propriété : pour tout entier n , $a_n \geq 0$.

Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés (P_2) et (Q) , alors elle vérifie la propriété (P_1)

(on pourra montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$).

Si on prend pour (Q) la propriété :

la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$),

on obtient le **théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.