

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

Partie I: Intégrales de Wallis

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ où n désigne un entier naturel

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante
2. (a) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n
(b) En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.
3. (a) Montrer l'équivalence : $I_{n+1} \sim I_n$
(b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ avec $J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante
(c) En déduire l'équivalence : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Partie II: Équivalent de la somme à partir de ses coefficients

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On fait les hypothèses suivantes :

- (i) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs
- (ii) la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge
- (iii) $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a rayon de convergence égal à 1
- (iv) $b_n = o(a_n)$

On note u et v les sommes respectives de ces deux séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

4. (a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
(b) On fixe un réel ε strictement positif.
Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout x tel que $0 \leq x < 1$,

$$|v(x)| \leq \sum_{n=0}^N |b_n| + \frac{\varepsilon}{2} u(x)$$

- (c) Montrer que $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ et en déduire qu'au voisinage de 1 : $v(x) = o(u(x))$
5. Montrer que si l'on remplace l'hypothèse $b_n = o(a_n)$ par $b_n \sim a_n$, alors au voisinage de 1 on a l'équivalence :

$$u(x) \underset{1^-}{\sim} v(x)$$

6. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} n^3 \ln \left(\cosh \frac{1}{n} \right) x^n$
(b) Déterminer un équivalent simple en 1 de sa somme.
7. On considère les séries entières $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n$, où l'on a posé pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
(a) Vérifier que leur rayon de convergence est 1 et montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\ln(1-x)$$

- (b) En déduire un équivalent au voisinage de 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

Partie III: Équivalent de la somme à partir de la somme partielle de ses coefficients

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On fait les hypothèses suivantes :

- (i) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs
- (ii) la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge
- (iii) $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a rayon de convergence égal à 1
- (v) $B_n \sim A_n$, où l'on a posé $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$

On note u et v les sommes respectives de ces deux séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

8. Vérifier l'égalité, pour tout x réel

$$(1-x) \sum_{p=0}^n A_p x^p = \sum_{p=0}^n a_p x^p - A_n x^{n+1}$$

et en déduire que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} A_n x^n$ est égal à 1

9. (a) Établir les relations, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

(b) Déduire qu'on a, au voisinage de 1, l'équivalence $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

10. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{a^n}$, où a est un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Vérifier que son rayon de convergence est 1 ;

(b) Montrer qu'au voisinage de 1, on a l'équivalence $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{a^n} \sim L \ln(1-x)$, où L est une constante réelle que l'on précisera.

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

Partie IV: Équivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$

11. Montrer que les séries entières $\sum_{n \geq 0} x^{n^2}$ et $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$ sont de rayons de convergence 1 et que l'on a, au voisinage de 1, l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$$

12. En déduire que l'on a, au voisinage de 1, l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

13. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x \cos t} dt$

14. En effectuant le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, calculer l'intégrale ci-dessus

15. En déduire qu'au voisinage de 1, on a l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{D}{\sqrt{1-x}}$$

où D est une constante réelle strictement positive que l'on précisera.

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

Partie I: Intégrales de Wallis

1. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq \cos t \leq 1 \implies 0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$$

On en déduit par intégration de 0 à $\frac{\pi}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante

2. (a) On procède à une intégration par parties, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t dt \\ &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t dt = (n+1) (I_{n+2} - I_n) \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall n \geq 0, \quad (n+2)I_n = nI_{n+2}$

- (b) — Calcul de I_{2n} :

La relation précédente donne $2nI_{2n} = (2n-1)I_{2(n-1)}$. On en déduit

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$. Cette relation est valable pour $n = 0$

— Calcul de I_{2n+1} :

La relation précédente donne aussi $(2n+1)I_{2n+1} = 2nI_{2n-1}$. On en déduit

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1$$

Or $I_1 = 1$, donc $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Cette relation est valable pour $n = 0$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < I_{n+2} < I_{n+1} < I_n$ et donc $0 < \frac{I_{n+2}}{I_n} < \frac{I_{n+1}}{I_n} < 1$. Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+2}{n+1}$ tend vers

1 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $I_{n+1} \sim I_n$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 2a, on a $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1}$ où encore $J_{n+1} = J_n$. Ainsi la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est constante et, par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = J_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

- (c) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Or $(n+1)I_nI_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nI_n^2$ (d'après 3a). Donc $nI_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ et,

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie II: Équivalent de la somme à partir de ses coefficients

4. (a) La relation de comparaison $b_n = o(a_n)$ entraîne l'inégalité $\text{Rc} \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) \geq \text{Rc} \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = 1$

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

- (b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $b_n = o(a_n)$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a_n| = \frac{\varepsilon}{2} a_n$. Soit alors $x \in [0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^N b_n x^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^N |b_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n| x^n \end{aligned}$$

- (c) Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = +\infty$.

Comme $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = +\infty$.

Soit $A > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k > 2A$.

Soit $n > N_1$. $x \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est continue en 1. Donc $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| < \alpha \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k \right| < A$.

D'où :

$\forall x \in]1 - \alpha, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k \geq \sum_{k=0}^n a_k - A \geq 2A - A = A$. J'ai donc montré que :

$\forall \alpha > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in [0, 1[$, $|x - 1| < \alpha \Rightarrow u(x) > A$, ce qui signifie $\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = +\infty$.

Or $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1[$, $|v(x)| \leq \sum_{n=0}^N |b_n| + \frac{\varepsilon}{2} u(x)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = +\infty$, $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall x \in [0, 1[$, $|x - 1| < \alpha \Rightarrow u(x) > \left(\sum_{n=0}^N |b_n| \right) \frac{2}{\varepsilon}$. D'où :

$\forall x \in [0, 1[$, $|x - 1| < \alpha \Rightarrow |v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} u(x) + \frac{\varepsilon}{2} u(x) = \varepsilon u(x)$

$$\Rightarrow \left| \frac{v(x)}{u(x)} \right| \leq \varepsilon. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{v(x)}{u(x)} = 0 \text{ et}$$

$v(x) = o(u(x))$ au voisinage de 1

5. Si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, $a_n = b_n + c_n$ avec $c_n = o(b_n)$. Or, on a maintenant $b_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, $\sum_{n \geq 0} b_n$

diverge et $\sum b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. Donc si l'on appelle w la somme de $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$.

$\forall x \in [0, 1[$, $u(x) = v(x) + w(x)$ avec $w(x) = o(v(x))$ au voisinage de 1 d'après la question précédente, ce qui montre que :

$$u(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} v(x)$$

$$\begin{aligned} 6. \quad (a) \quad n^3 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1 \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 \left(\frac{1}{2n^2} \right) \end{aligned}$$

$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. Or $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2} x^n$ a pour rayon de convergence 1, le coefficient étant une fonction

rationnelle de n . Donc :

$$\sum_{n \geq 0} n^3 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) x^n \text{ a pour rayon de convergence 1}$$

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

- (b) $\left(\frac{n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2}$ diverge, $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2} x^n$ a pour rayon de convergence 1, $n^3 \ln\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \ln\left(\frac{1}{n}\right) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2} x^n. \text{ Or :}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2} x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2. \text{ D'où :}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \ln\left(\frac{1}{n}\right) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

7. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq H_n \leq n$; d'où si l'on note $R_c\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right)$ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, l'on obtient :

$$R_c\left(\sum_{n \geq 1} n x^n\right) \leq R_c\left(\sum_{n \geq 1} H_n x^n\right) \leq R_c\left(\sum_{n \geq 1} x^n\right). \text{ Comme } R_c\left(\sum_{n \geq 1} n x^n\right) = R_c\left(\sum_{n \geq 1} x^n\right) = 1, \text{ l'on en déduit que :}$$

$$R_c\left(\sum_{n \geq 1} H_n x^n\right) = 1$$

$$\forall n \geq 2, \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1, \text{ ce qui montre que :}$$

$$R_c\left(\sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} H_{n-1} x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (H_n - H_{n-1}) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \text{ D'où :} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\ln(1-x)$$

- (b) $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'où $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. Or (H_n) est une suite à termes positifs, $\sum H_n$ diverge (H_n ne tend pas vers 0), $R_c\left(\sum_{n \geq 1} H_n x^n\right) = 1$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n. \text{ D'où,}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Partie III

$$\begin{aligned} 8. \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (1-x) \sum_{p=0}^n A_p x^p &= \sum_{p=0}^n A_p x^p - \sum_{p=0}^n A_p x^{p+1} \\ &= \sum_{p=0}^n A_p x^p - \sum_{p=1}^{n+1} A_{p-1} x^p \end{aligned}$$

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

$$\begin{aligned}
&= A_0 + \sum_{p=1}^n (A_p - A_{p-1}) x^p - A_n x^{n+1} \\
&= a_0 + \sum_{p=1}^n a_p x^p - A_n x^{n+1}. \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (1-x) \sum_{p=0}^n A_p x^p = \sum_{p=0}^n a_p x^p - A_n x^{n+1}$$

D'où si $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (1-x) \sum_{p=0}^n A_p x^p = \sum_{p=0}^n a_p x^p - A_n x^{n+1} \leq \sum_{p=0}^n a_p x^p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$ puisque $\sum_{n \geq 0} a_p x^p$

converge et est à termes positifs. D'où la suite $\left(\sum_{p=0}^n A_p x^p \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p}{1-x}$: elle converge, ce qui montre que $\sum_{n \geq 0} A_p x^p$ converge ; on en déduit que $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} A_p x^p$ est absolument conver-

gente et que $R_c \left(\sum_{n \geq 0} A_n x^n \right) \geq 1$. Comme (A_n) tend vers $+\infty$, $\sum_{n \geq 0} A_n$ diverge et $R_c \left(\sum_{n \geq 0} A_n x^n \right) \leq 1$. Donc :

$$R_c \left(\sum_{n \geq 0} A_n x^n \right) = 1$$

9. $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} A_n x^n$ converge et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x^n = 0$. Donc d'après IV.A.,

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x) \sum_{p=0}^{+\infty} A_p x^p = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p \Rightarrow$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{1-x}$$

Comme $R_c \left(\sum_{n \geq 0} A_n x^n \right) = 1$ et $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} A_n$, $R_c \left(\sum_{n \geq 0} B_n x^n \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n x^{n+1} = 0$. En outre d'après IV.A.,

$\forall x \in]-1, 1[, \forall n \in \mathbb{N}$, $(1-x) \sum_{p=0}^n B_p x^p = \sum_{p=0}^n b_p x^p - B_n x^{n+1}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que

$\left(\sum_{p=0}^n b_p x^p \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{1-x}$$

Enfin, comme (A_n) est à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} A_n$ diverge, $R_c \left(\sum_{n \geq 0} A_n x^n \right) = 1$, $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} A_n$, d'après III.B.,

$$u(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} v(x)$$

10. Pour $x = 1$, $\sum_{n \geq 0} x^{a_n}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Donc $R_c \left(\sum_{n \geq 0} x^{a_n} \right) \leq 1$.

Pour $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^n |x|^{a_k} \leq \sum_{k=0}^n |x|^k$ qui tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} |x|^k$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\sum_{n \geq 0} x^{a_n}$ est absolument

convergente et $R_c \left(\sum_{n \geq 0} x^{a_n} \right) \geq 1$. Donc :

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

$$R_c \left(\sum_{n \geq 0} x^{a^n} \right) = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$; la suite $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante; posons $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall p \in \mathbb{N}, n \neq a^p \\ 1 & \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, n = a^p \end{cases}$. Alors :

$\sum_{n \geq 0} x^{a^n} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier positif tel que $a^p \leq n < a^{p+1}$, alors $A_n = p$ et $\frac{\ln n}{\ln a} - 1 <$

$p \leq \frac{\ln n}{\ln a}$, ce qui montre $p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln a}$. En posant $B_n = \frac{\ln n}{\ln a}$, $b_0 = 0$ et $b_n = B_n - B_{n-1}$, on a :

(a_n) est à termes positifs non tous nuls, $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$, $R_c(\sum a_n x^n) = 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge; d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln a} x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln(a)(1-x)}.$$
 Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln(a)}.$$
 J'ai montré :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln(a)}$$

11. (a) Pour $x = 1$, $\sum_{n \geq 0} x^{n^2}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Donc $R_c \left(\sum_{n \geq 0} x^{n^2} \right) \leq 1$.

Pour $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^n |x|^{k^2} \leq \sum_{k=0}^n |x|^k$ qui tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} |x|^k$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\sum_{n \geq 0} x^{n^2}$ est absolument

convergente et $R_c \left(\sum_{n \geq 0} x^{n^2} \right) \geq 1$. Donc :

$$R_c \left(\sum_{n \geq 0} x^{n^2} \right) = 1$$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En utilisant la règle de d'Alembert, on obtient :

$$R_c \left(\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n \right) = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$; la suite $(p^2)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante; posons $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall p \in \mathbb{N}, n \neq p^2 \\ 1 & \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, n = p^2 \end{cases}$. Alors :

$\sum_{n \geq 0} x^{n^2} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier positif tel que $p^2 \leq n < (p+1)^2$, alors $A_n = p$

et $\sqrt{n} - 1 < p \leq \sqrt{n}$, ce qui montre $p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$. En posant $B_n = \sqrt{n+1}$, $b_0 = 1$ et $b_n = B_n - B_{n-1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on a :

(a_n) est à termes positifs non tous nuls, $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$, $R_c(\sum a_n x^n) = 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge; d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n \Leftrightarrow (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$
 D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$$

ÉQUIVALENT DE LA SOMME

(b) On sait que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; donc $\frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} I_n$.

D'après III.B. appliquée aux séries entières $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} I_n x^n$ ($(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est à termes positifs, $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge, $R_c \left(\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n \right) = 1$ et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} I_n$),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

(c) $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in]-1, 1[, |x \cos(t)| < 1$, donc $\frac{1}{1 - x \cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t$. D'où :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1 - x \cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t \text{ et :}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos t} dt = \sum_{k=0}^n x^k \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^k t dt}_{I_k} + \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t \right) dt. \text{ Or :}$$

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t = \frac{x^{n+1} \cos^{n+1} t}{1 - x \cos t} \text{ et}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \left| \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t \right) dt \right| \leq |x|^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1} t}{1 - x \cos t} dt \leq |x|^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x \cos t} \text{ (intégrale d'une fonction continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) \text{ qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } +\infty. \text{ D'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \cos^k t \right) dt = 0 \text{ et :}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k x^k$$

(d) Calculons $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos t} dt$ à l'aide du changement de variables $u = \tan \frac{t}{2}$ (C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos t} dt = \int_0^1 \frac{2du}{1 + u^2 - x(1 - u^2)}$$

$$= \int_0^1 \frac{2du}{1 - x + u^2(1 + x)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} du}{1 + \left(u \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left[\arctan \left(u \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) \right]_0^1. \text{ D'où :}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos t} dt = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

$$\text{Or } \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2(1-x)}}. \text{ D'où :}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2(1-x)}} \text{ et}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$$