

Fonctions holomorphes

Définitions et notations

Dans tout le problème, soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur U .

On pose $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}/x + iy \in U\}$, $p : (x, y) \in V \mapsto \Re f(x + iy)$ et $q : (x, y) \in V \mapsto \Im f(x + iy)$.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continue et C^1 par morceaux sur $[0, 1]$. On appelle intégrale curviligne de f suivant γ le nombre $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. On le note $\int_\gamma f(z)dz$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on désigne par $\text{Arg} z$ l'argument principal de z .

On admet que si $\mathcal{O}$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$ alors $\forall a, b \in \mathcal{O}, \exists \gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{O}$ continue et C^1 par morceaux telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Première partie

Holomorphie et équation de Laplace

1: Montrer que V est ouvert.

2: Montrer que si f est holomorphe sur U alors p et q sont de classe C^2 sur V et vérifient l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sur V .

3: On considère l'application $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3-1: Montrer que l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas étoilé.

3-2: Montrer que g est de classe C^2 et vérifie l'équation de Laplace sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3-3: Montrer que si $\exists h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \Re h(x + iy) = g(x, y)$ alors $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ est exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4: Trouver une contradiction et conclure.

5: Montrer que U est étoilé si et seulement si V est étoilé.

6: On suppose, maintenant, que U est étoilé et soit $u \in C^2(V)$ qui vérifie l'équation de Laplace sur V .

6-1: Montrer que la forme différentielle $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ est exacte sur V .

6-2: En déduire que $\exists g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U telle que $\forall (x, y) \in V, \Re g(x + iy) = u(x, y)$.

7: Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7-1: Chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction holomorphe g sur $\mathbb{C}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \Re g(x + iy) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

7-2: Déterminer g dans ce cas.

Deuxième partie

Principe du maximum

On suppose, dans cette partie, que f holomorphe sur U .

1: Montrer que toute fonction entière bornée est constante sur $\mathbb{C}$ (Théorème de Liouville).

2: **Application** : Soit g une fonction entière et on suppose que $g(\mathbb{C})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$.

2-1: Montrer que $\exists a \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |g(z) - a| \geq \varepsilon$.

2-2: Montrer que g est constante. Conclure.

3: **Application** : Soit P un polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ et on pose $m = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.

3-1: Montrer que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$.

3-2: Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $|P(a_n)| \rightarrow m$. Montrer que $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée.

3-3: Montrer que $\exists a \in \mathbb{C}$ tel que $|P(a)| = m$.

3 - 4: Montrer que si $P(a) \neq 0$ alors P est constant. En déduire que P admet au moins une racine (Théorème de d'Alembert-Gauss).

4: Soit $\forall a \in U$ et $R > 0$ tel que $\mathcal{D}(a, R) \subset U$. Montrer que $\forall r \in [0, R[$ on a $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$ (Propriété de la moyenne).

5: On suppose que U est ouvert connexe par arcs.

5 - 1: Montrer que si $|f|$ est constante sur U alors f est constante sur U .

5 - 2: Montrer que si $|f|$ admet un maximum relatif en $a \in U$ alors f est constant sur U (Principe du maximum).

6: Application : On suppose que U est ouvert connexe par arcs.

6 - 1: Montrer que si p admet un maximum local en $a \in U$ alors $g = \exp(f)$ est constante sur U . En déduire que f est constante sur U .

6 - 2: Montrer que si p admet un minimum local en $a \in U$ alors f est constante sur U .

Troisième partie

Intégrale curviligne, primitive d'une fonction complexe, logarithme complexe

1: Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continue et C^1 par morceaux sur $[0, 1]$. Montrer que si f admet une primitive F sur U alors $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$. Que peut-on déduire ? et pour les lacets ?

2: Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ avec $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $\gamma(t) = e^{it}$. En déduire que $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

3:

3 - 1: Montrer que $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une unique primitive sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ qui s'annule en 1. On la note $\log$.

3 - 2: Montrer que $\forall z \in \Omega, e^{\log z} = z$.

3 - 3: En déduire que $\forall z \in \Omega, \log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Calculer $\log i, \log(3i), \log(1+i)$ et $\log e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$.

3 - 4: Montrer que $\forall z \in \Omega$ de forme algébrique $z = x + iy, \log z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

3 - 5: Montrer que $\ln$ se prolonge de façon unique en une fonction holomorphe sur Ω .

4: Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

5: Soient $z_0 \in U, R = \sup\{r > 0 / \mathcal{D}(z_0, r) \subset U\}, r \in]0, R[$ et $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{it}$.

5 - 1: Montrer que $\forall z \in D(z_0, r), \int_{\gamma} \frac{du}{u-z} = 2i\pi$.

5 - 2: Montrer que si f est holomorphe sur U alors on a les formules de Cauchy :

$$1. \forall z \in D(z_0, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{u-z} du.$$

$$2. \forall z \in D(z_0, r), \forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-z)^{k+1}} du.$$

6: Montrer que $\forall \gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continue et C^1 par morceaux on a $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma^*} u + i \int_{\gamma^*} v$ avec $\gamma^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\gamma^* = (\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma)$ et u, v les formes différentielles $u = p dx - q dy$ et $v = q dx + p dy$.

7: En déduire que f admet une primitive sur U si et seulement si $\int_{\gamma} f = 0$ pour tout lacet γ dans U .

8: En déduire que si U est ouvert étoilé alors f est holomorphe sur U si et seulement si pour tout lacet γ de U on a $\int_{\gamma} f = 0$.

9: Soit (g_n) une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur U vers une fonction g . Montrer que g est holomorphe.

10: On suppose, dans cette question, que U est ouvert connexe par arcs et que pour tout lacet γ sur U on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Soit $a \in U$ et on définit sur U l'application $F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz$ où $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continue, C^1 par morceaux et telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = z$.

10 - 1: Montrer que F est bien définie sur U .

10 - 2: Montrer que F est une primitive de f sur U .

10 - 3: Montrer que F est l'unique primitive de f sur U qui s'annule en a .

11: Soit $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ continue et C^1 par morceaux telle que $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = z$. Montrer que $\log z = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.