

# CONCOURS NATIONAL MAROCAIN - Session 2016

## Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

### Problème : 1

#### Partie I

1. (a) D'après la formule de Binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k} = 1.$$

(b) Soit  $x \in [0, 1]$ , on a  $0 \leq B_{n,k}(x) \leq \sum_{j=0}^n B_{n,j} = 1$ .

2. On a, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k B_{n,k} &= \sum_{k=1}^n k B_{n,k} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= nX \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \\ &= nX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) B_{n,k} \\ &= n \sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n(n-1) X^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^k (1-X)^{n-2-k} \\ &= n(n-1) X^2 \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k} + \sum_{k=0}^n k B_{n,k} = nX((n-1)X + 1).$$

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

- Si  $k = 0$ ,  $B_{n,0} = (1-X)^n$  et donc  $B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$ .
- Si  $k = n$ ,  $B_{n,n} = X^n$  et donc  $B'_{n,n} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}$ .
- Si  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et comme  $(n-k) \binom{n}{k} = (n-k) \binom{n}{n-k} = n \binom{n-1}{n-1-k} = n \binom{n-1}{k}$ , alors :

$$B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}).$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
(P_n(f))'(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B'_{n,k}(x) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0}(x) + nf(1)B_{n-1,n-1}(x) + n \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) (B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x)) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0}(x) + nf(1)B_{n-1,n-1}(x) + n \sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k}(x) - n \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k}(x) \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k}(x) - n \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k}(x) \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n-1,k}(x)
\end{aligned}$$

(c) On suppose que  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ . Soit  $x \in [0, 1]$ . On a, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$  et donc  $(P_n(f))'(x) \geq 0$ . D'où  $P_n(f)$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

4. (a) Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) &= x^2 \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) - 2\frac{x}{n} \sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x) \\
&= x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2 + x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

(b) Démontrons le résultat par l'absurde. Supposons, donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists (x_n, y_n) \in [0, 1]^2$ ,  $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$  et  $|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}$ . Puisque  $[0, 1]^2$  est un compact, alors, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite  $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n$  de  $((x_n, y_n))_n$  convergeant vers  $(x, y) \in [0, 1]^2$ . Or  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$ , donc, par passage à la limite, on a  $x = y$ . Et  $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \frac{\varepsilon}{2}$  contredit le fait que  $f$  est continue.

(c) i. On a, pour tout  $k \in A$ ,  $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , donc :

$$\sum_{k \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in A} B_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n B_{n,k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ii.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k} &\leq 2M \sum_{k \in B} B_{n,k} \\
&\leq \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} \text{ car } \forall k \in B, \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2} \geq 1 \\
&\leq \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} \\
&\leq \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x) \text{ d'après I.4.a} \\
&\leq \frac{M}{2n\alpha^2} x(1-x) \text{ car } \forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(d) Soit  $x \in [0, 1]$ . Comme  $(A, B)$  est une partition de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^n f(x) B_{n,k}(x)$  (d'après I.1.a) et donc,

d'après I.4.c.i et I.4.c.ii

$$\begin{aligned}
|P_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k} \\
&\leq \sum_{k \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k} + \sum_{k \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

(e) Comme  $\frac{M}{2n\alpha^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{M}{2n\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], n \geq N \implies |P_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . D'où  $(P_n(f))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

5. Considérons  $\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, 1]$ , il est clair que  $\varphi$  est une bijection continue et  $\varphi^{-1} : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$   
 $x \longmapsto \frac{x-a}{b-a}$   $x \longmapsto (1-x)a + xb$

Posons  $f = g \circ \varphi^{-1}$  qui est continue sur  $[0, 1]$ . Donc elle est limite uniforme de  $(P_n(f))_{n \geq 1}$  sur  $[0, 1]$ .

Posons :  $\forall n \geq 1, \forall x \in [a, b], Q_n(g)(x) = P_n(f(x))(\varphi(x))$  (est une fonction polynômiale). Alors  $\forall x \in [a, b]$

$$|g(x) - Q_n(g)(x)| = |(f - P_n(f))(\varphi(x))| \leq \|f - P_n(f)\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

c-à-d  $(Q_n(g))_n$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$ .

## Partie II

1. (a) Puisque  $S_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $x$ , alors  $S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(S_n = k) = B_{n,k}(x)$ .

Donc

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x) = nx \text{ et } V(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2 = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} B_{n,k}(x) - n^2 x^2 = nx(1-x).$$

$$\text{Donc } E(X_n) = x \text{ et } V(X_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

(b) Soit  $\delta > 0$ . On a d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \frac{V(X_n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

2. (a) D'après le théorème de transfert,

$$C_n(f)(x) = E(f(X_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) = P_n(f)(x)$$

Donc  $C_n(f)$  est polynômiale sur  $[0, 1]$ .

(b) i. Puisque, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $P\left(X = \frac{k}{n}\right) = P(S_n = k) = B_{n,k}(x)$ , alors d'après la question I.4.c.i on a le résultat.

ii. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \beta$ , on a  $\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = (|X_n - x| > \beta)$  et donc, d'après II.1.b,

$$P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{4n\beta^2}. \text{ D'où}$$

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \beta} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \leq \frac{M}{2n\beta^2}.$$

(c) On procède comme dans I.4.d et I.4.e pour conclure que  $(C_n(f))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

### Partie III

1. (a) Par linéarité de l'intégrale, on a :  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ . Or d'après le théorème de Stone-Weierstrass  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes réels  $(P_n)_n$  sur  $[a, b]$ . Et on a

$$\forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, |f^2(x) - f(x)P_n(x)| = |f(x)||f(x) - P_n(x)| \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $(fP_n)_n$  converge uniformément vers  $f^2$  sur  $[a, b]$ .

D'après le théorème d'interversion limite-intégrale,  $0 = \int_a^b f(x)P_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f^2(x)dx$ . Donc  $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ . Or  $f^2$  est positive et continue sur  $[a, b]$ , donc  $f^2$  est nulle sur  $[a, b]$ . D'où  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ .

- (b) La fonction  $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  car elle y est continue et  $|x^n e^{-(1-i)x}| = x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

au voisinage de  $+\infty$ . Et, par intégration par partie, on a  $I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} I_n$ . D'où, par récurrence sur  $n$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{(1-i)^n} I_0 = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

- (c) Soit  $\phi : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto e^{-\sqrt[4]{x}} \sin(\sqrt[4]{x})$ .  $\phi$  est continue et non nulle sur  $[0, +\infty[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant

le changement de variable  $y = \sqrt[4]{x}$  et la question III.1.b,

$$\int_0^{+\infty} x^n \phi(x) dx = 4 \int_0^{+\infty} y^{4n+3} e^{-y} \sin(y) dy = 4 \operatorname{Im}(I_{4n+3}) = 0$$

**Commentaire :** cette question nous permet de conclure que la généralisation de III.1.a n'est pas vraie sur un intervalle quelconque.

2. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite  $(Q_n)_n$  de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers  $g$ .

On a alors  $\int_a^b Q_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) dt$ .

Posons  $P_n(t) = Q_n(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b Q_n(x) dx$  et donc  $(P_n)_n$  est une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$  vérifiant  $\int_a^b P_n(t) dt = 0$ .

3. Comme  $\varphi'$  est continue sur  $I$ , alors il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers  $\varphi'$  sur  $I$ .

Posons alors  $P_n(x) = \varphi(a) + \int_a^x Q_n(t) dt$ . L'inégalité  $|P_n(x) - \varphi(x)| \leq \int_a^x |\varphi'(t) - Q_n(t)| dt$  permet d'établir que  $(P_n)_n$  converge uniformément vers  $\varphi$  sur  $I$ . Et puisque  $P'_n = Q_n$ , la suite  $(P_n)_n$  convient.

4. il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers  $\psi$  sur  $I$ . Posons  $m_n = \inf_{t \in I} Q_n(t)$  et  $m = \inf_{t \in I} \psi(t)$ . Or  $Q_n$  et  $\psi$  sont continues sur le segment  $I$ , donc il existe  $t_n, t' \in [a, b]$  tel que  $m_n = Q_n(t_n)$  et  $m = \psi(t')$ . Montrons que  $m_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m \geq 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall t \in I, |\psi(t) - Q_n(t)| < \varepsilon$ , donc  $\forall n \geq N, m_n = Q_n(t_n) > \psi(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$  et  $m = \psi(t') > Q_n(t') - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$  donc  $\forall n \geq N, |m_n - m| < \varepsilon$ . Ainsi  $m_n \rightarrow m$ .

La suite  $(P_n = Q_n - m_n + m)$  convient.

## Problème : 2

### Partie I

1. Si  $Z$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors  $Z(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $P(Z = 1) = p, P(Z = 0) = 1 - p$ . Donc par, le théorème de transfert,

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = pe^t + 1 - p.$$