

Variables aléatoires discrètes

Exercice :3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, A un événement de Ω de probabilité non nul. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P_A = P$

Solution :3

Si $P_A = P$, alors A est indépendant avec tout événement de Ω ce qui entraîne alors que $P(A \cap A) = (P(A))^2$ et par suite $P(A) \in \{0, 1\}$ et comme A est de probabilité non nulle alors $P(A) = 1$

Supposons que $P(A) = 1$ alors $P(\bar{A}) = 0$. Soit $B \in \mathcal{T}$, on a $P(\bar{A} \cap B) \leq P(\bar{A}) = 0$ ce qui entraîne alors que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$ ce qui prouve alors que $\bar{A}$ et B sont indépendants et par suite A et B sont indépendants d'où le résultat

Exercice :2

Soit $a \in]1, +\infty[$, on rappelle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ est convergente sa somme est noté $\zeta(a)$

- ① Démontrer que l'on peut définir une probabilité P_a sur $\mathbb{N}^*$, à l'aide de la suite de réels $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \frac{1}{k^a \zeta(a)}$. On considère désormais l'espace probabilités $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P_a)$
- ② Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on note $A_m = m\mathbb{N}^*$, c'est à dire l'ensemble des multiples de l'entier m . Calculer $P_a(A_m)$
- ③ Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux entiers non nuls i et j pour que A_i et A_j soient indépendants
- ④ On note pour $i \in \mathbb{N}^*$, p_i le i -ème entier premier et C_n l'ensemble des entiers divisibles par aucun nombre premier p_i pour $i \in [1, n]$. Calculer $P_a(C_n)$ et déterminer $\bigcap_{n \geq 1} C_n$
- ⑤ En déduire le développement Eurlien de la fonction $\zeta : \forall a > 1, \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$

Solution :2

- ① La famille $(p_k)_k$ définit une probabilité si elle est sommable de somme égale à 1. Comme elle est indexée par $\mathbb{N}$ alors ceci est équivalent à la série $\sum_{n \geq 1} p_n$ est convergente. Or $a > 1$, alors la série de Reimann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$

est convergente et par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{\zeta(a)}}{n^a} \right) = \frac{1}{\zeta(a)} \zeta(a) = 1$, d'où le résultat

- ② Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on a : $P_a(A_m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\zeta(a)} \cdot \frac{1}{(km)^a} \right) = \frac{1}{m^a \cdot \zeta(a)} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \right) = \frac{1}{m^a}$

- ③ Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les événements A_i et A_j sont indépendants si, et seulement si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) = \frac{1}{i^a j^a}$$

Or $A_i \cap A_j$ est l'ensemble des multiples communs des entiers i et j et par suite $A_i \cap A_j = A_{i \vee j}$ et par suite $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{(i \vee j)^a}$, on en déduit alors que les événements A_i et A_j sont indépendants si, et seulement si $i \cdot j = i \vee j$ ce qui est équivalent à $i \wedge j = 1$

- ④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que $C_n = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$, comme les p_i sont premier entre eux alors d'après la question précédente les A_i sont indépendants et donc les $\bar{A}_i$ aussi et par suite on a :

$$P(C_n) = \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)$$

$\bigcap_{n \geq 1} C_n$ est l'ensemble des entiers naturels qui n'est divisible par aucun nombre premier donc c'est l'entier 1

et par suite $\bigcap_{n \geq 1} C_n = \{1\}$. La suite $(C_n)_n$ est une suite décroissante d'événements donc d'après

**Variables aléatoires discrètes**

Le théorème de continuité monotone on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(a)}$, ce qui entraîne alors que $\frac{1}{\zeta(a)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^a}\right)$ ce qui donne alors $\zeta(a) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^a}\right)^{-1}$

Exercice :1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$

- ① Exprimer $E(X)$ en fonction de $P(X \geq k)$
- ② On suppose que les variables X et Y sont indépendantes et suit une loi uniforme. Déterminer l'espérance de variables suivantes $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ et $|X - Y|$

Solution :1

- ① Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on $(X \geq k) = (X = k) \cup (X > k)$ et comme les événements $(X = k)$ et $(X > k)$ sont incompatibles alors $P(X \geq k) = P([X = k]) + P([X > k])$ et par suite

$$P([X = k]) = P([X \geq k]) - P([X > k]) = P([X \geq k]) - P([X \geq k+1])$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k(P([X \geq k]) - P([X \geq k+1])) = \sum_{k=1}^n kP([X \geq k]) + \sum_{k=1}^n kP([X \geq k+1]) \\ &= \sum_{k=1}^n kP([X \geq k]) - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)P([X \geq k]) = P([X \geq 1]) - nP(X \geq n+1) + \sum_{k=2}^n P([X \geq k]) \end{aligned}$$

Comme $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $P([X \geq n+1]) = 0$, on conclut alors que $E(X) = \sum_{k=1}^n P([X \geq k])$

- ②  La variable aléatoire $\min(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. D'après le résultat précédent on a

$$(*) : E(\min(X, Y)) = \sum_{k=1}^n P(\min(X, Y) \geq k) = \sum_{k=1}^n P([X \geq k] \cap [Y \geq k]) = \sum_{k=1}^n P([X \geq k]) \cdot P([Y \geq k])$$

Ceci d'une part d'autre part, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P([X \geq k]) = \sum_{i=k}^n P([X = i]) = \sum_{i=k}^n \frac{1}{n}$ et par suite

$$P([X \geq k]) = \frac{n-k+1}{n}. \text{ Comme les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi uniforme alors}$$

$P([X \geq k]) = P([Y \geq k]) = \frac{n-k+1}{n}$, en remplaçant dans l'égalité (*) on obtient

$$\begin{aligned} E(\min(X, Y)) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{(n-k+1)^2}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n (n+1)^2 - 2k(n+1) + k^2 \right) \\ &= \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \end{aligned}$$

 Il est clair que $\max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$, donc par linéarité de l'espérance on obtient $E(\max(X, Y)) = E(X) + E(Y) - E(\min(X, Y)) = 2E(X) - E(\min(X, Y))$ car les variables aléatoires X et Y suivent la même loi, et par suite

$$E(\max(X, Y)) = n+1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)}{6n} (6n - (2n+1)) = \frac{(4n-1)(n+1)}{6n}$$

 Il est clair que $|X - Y| = 2\max(X, Y) - (X + Y)$ et par suite

$$E(|X - Y|) = 2E(\max(X, Y)) - 2E(X) = \frac{(4n-1)(n+1)}{3n} - (n+1) = \frac{(n+1)}{3n} (-3n + 4n - 1) = \frac{(n^2 - 1)}{3n}$$

Exercice :2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$

$$1.1 \text{ Montrer que, pour tout entier naturel non nul } n : \sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$$

1.2 On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq nP(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$$

En déduire que la série $\sum_n P(X > n)$ converge, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X)$

1.3 On suppose que la série $\sum_n P(X > n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum_n nP(X = n)$ est convergente

 Variables aléatoires discrètes

Et que X admet une espérance

1.4 Enoncer le théorème qui vient d'être établi, en faisant intervenir la fonction de répartition

2 Montrer que si X admet une variance, alors $E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)P(X > k)$

Solution :2

$$\begin{aligned} 1.1 \quad \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(P([X \geq k]) - P([X > k])) = \sum_{k=1}^n k(P([X > k-1]) - P([X > k])) \\ &= \sum_{k=1}^n kP([X > k-1]) - \sum_{k=1}^n kP([X > k]) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P([X > k]) - \sum_{k=1}^n kP([X > k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P([X > k]) - nP([X > n]) \end{aligned}$$

1.2  Il est clair que $nP([X > n]) \geq 0$ et comme X admet une espérance alors la série $\sum_k kP([X = k])$ est

convergente. On a $nP(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP([X = k]) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP([X = k])$

 Comme la limite, de la suite des restes de la série $\sum_k kP([X = k])$, est nulle alors par encadrement on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP([X > n]) = 0$ et par suite d'après la première question la série $\sum_n P([X > n])$ est convergente de somme égale à $E(X)$

1.3  On suppose que la série $\sum_n P([X > n])$ est convergente. D'après la première question on a

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{k=0}^n kP([X = k]) \leq \sum_{k=0}^n P([X > k]) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P([X > n])$, ce qui prouve alors que la suite des sommes partielles de la série $\sum_n nP([X = n])$ est majorée et par suite cette série convergente.

 Comme X admet une espérance alors d'après la deuxième question on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP([X > n]) = 0$ et par passage à la limite dans l'égalité de la première question, on obtient $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X > n])$

1.4 On vient d'établir le théorème suivant : Si X est une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_n P([X > n])$ auquel cas on a

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X > n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - F_X(n))$$

2. Supposons que X admet une variance alors X^2 admet une espérance c'est à dire la série $\sum_n n^2 P([X = n])$ est convergente. Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 P([X = k]) &= \sum_{k=1}^n k^2 (P([X > k-1]) - P([X > k])) = \sum_{k=1}^n k^2 P([X > k-1]) - \sum_{k=1}^n k^2 P([X > k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 P([X > k]) - \sum_{k=0}^n k^2 P([X > k]) = -n^2 P([X > n]) + \sum_{k=1}^n (2k+1)P([X > k]) : (*) \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n^2 P([X > n]) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^2 P([X = k])$ et comme la série $\sum_n n^2 P([X = k])$ est convergente alors la suite de ses restes tend vers 0 et par suite par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 P([X > n]) = 0$ et de l'égalité

(*) on obtient alors la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (2n+1)P([X > n])$ converge et que sa somme est

$$\sum_{n \geq 0} (2n+1)P([X > n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P([X = n])$$



Variables aléatoires discrètes

Exercice :4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = 0$ et $\forall x > 0, f(x) = -x \ln(x)$. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans un ensemble fini E de cardinal N . On appelle entropie de X le réel noté $H(X)$ défini par : $H(X) = \sum_{x \in E} f(P([X = x]))$

- ① Quel est le signe de $H(X)$?
- ② Calculer $H(X)$ lorsque H est constante
- ③ Calculer $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme
- ④ Montrer que $\sum_{x \in E} f(NP([X = x])) \leq 0$
- ⑤ En déduire une majoration de $H(X)$
- ⑥ Pour quelles variables X l'entropie est-elle minimale ?
- ⑦ Pour quelle variable X l'entropie est-elle maximale ?

Solution :4

- ① On note que si $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$ donc $f(x) > 0$. De plus $f(0) = f(1) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour tout $x \in E$, $P([X = x]) \in [0, 1]$ donc $f(P([X = x])) \geq 0$. On en déduit que $H(X) \geq 0$
- ② Si X est constante alors il existe $a \in E$ tel que $P([X = a]) = 1$ et $\forall x \in E, x \neq a \Rightarrow P([X = x]) = 0$. On a donc $H(X) = 0$ puis que $f(0) = f(1) = 0$

- ③ Si X suit une loi uniforme, on a $\forall x \in E, P([X = x]) = \frac{1}{N}$ avec N le cardinal de E et donc

$$f(P([X = x])) = -\frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\ln N}{N}. \text{ On en déduit alors que } H(X) = \ln N$$

- ④ Posons pour $x \geq 0$, $g(x) = f(x) + x - 1$. On a, pour $x > 0$, $g'(x) = -\ln x$, donc la fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Son maximum est atteint en 1 seulement et vaut $g(1) = 0$ ce qui entraîne alors que $g \leq 0$ (Car on a aussi $g(0) = -1 \leq 0$). On a donc pour $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$, donc $f(x) \leq 1 - x$ avec égalité si, et seulement si, $x = 1$. On a pour $x \in E$, $f(NP([X = x])) \leq 1 - NP([X = x])$. En additionnant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{x \in E} f(NP([X = x])) \leq \sum_{x \in E} (1 - NP([X = x]))$$

Et comme $\sum_{x \in E} P([X = x]) = 1$ alors $\sum_{x \in E} (1 - NP([X = x])) = N - N \sum_{x \in E} P([X = x]) = N - N = 0$, d'où l'on déduit : $\sum_{x \in E} f(P([X = x])) \leq 0$

- ⑤ On remarque si $P([X = x]) \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(NP([X = x])) &= -NP([X = x]) \ln(NP([X = x])) \\ &= -NP([X = x]) \ln N - NP([X = x]) \ln(P([X = x])) \\ &= f(N)P([X = x]) + Nf(P([X = x])) \end{aligned}$$

. Cette égalité reste encore vraie si $P([X = x]) = 0$. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} f(NP([X = x])) &= f(N) \sum_{x \in E} P([X = x]) + N \sum_{x \in E} f(P([X = x])) \\ &= f(N) + NH(X) \end{aligned}$$

. On en déduit alors que $H(X) \leq -\frac{f(N)}{N}$, c'est à dire $H(X) \leq \ln(N)$

- ⑥ On a vu que pour toute variable aléatoire X , $H(X) \geq 0$, donc la valeur minimale est 0. Si X n'est pas constante alors il existe $a \in E$ tel que $P([X = a]) > 0$ et comme $f(P([X = x])) \geq 0$ si $x \neq a$ alors, on a à fortiori $H(x) > 0$. On conclut : L'entropie $H(X)$ est minimale c'est à dire est nulle si, et seulement si X est une variable constante

- ⑦ On a vu que $H(X) \leq \ln N$ et que $H(X) = \ln N$ si X suit une loi uniforme. Supposons réciproquement que $H(X) = \ln N$ d'après la question (6) cela est équivalent à $\sum_{x \in E} f(P([X = x])) = 0$, c'est à dire à

$$\sum_{x \in E} f(P([X = x])) = \sum_{x \in E} (1 - NP([X = x])) \text{ ou encore } \sum_{x \in E} f(NP([X = x])) - 1 + NP([X = x]) = 0.$$

On a pour tout $x \in E$, $f(NP([X = x])) - 1 = NP([X = x]) \leq 0$, cette somme de termes négatifs est donc nulle si chaque terme est nul. D'après la question (6) cela est équivalent à $NP([X = x]) = 1$ et donc

$$P([X = x]) = \frac{1}{N}, \text{ pour tout } x \in E : X \text{ suit alors loi uniforme}$$

On conclut : L'entropie est maximale c'est à dire égale à $\ln N$ si, et seulement si X suit une loi uniforme

Variables aléatoires discrètes

Exercice :5

On rappelle que si X est une variable aléatoire discrète, positive, possédant une espérance, alors $\forall \lambda > 0$, $P([X \geq \lambda]) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$. Soit $(S_n)_n$ une variable aléatoire, qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p) et $x > 0$

- ① Montrer que, pour $\lambda > 0$, on a $P([S_n - np \geq nx]) \leq \frac{E(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$
- ② Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \leq t + e^{t^2}$, puis en déduire que $P([S_n - np \geq nx]) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}$
- ③ Montrer que : $P([S_n - np \geq nx]) \leq e^{-\frac{nx^2}{4}}$
- ④ En déduire l'inégalité de Bernstein :

$$P\left(\left[\frac{S_n}{n} - p \geq x\right]\right) \leq 2e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

Solution :5

- ① La fonction $\exp$ est croissante et $\lambda > 0$, donc on a

$$[S_n - np \geq nx] = [\lambda(S_n - np) \geq \lambda nx] = [e^{\lambda(S_n - np)} \geq e^{\lambda nx}]$$

La variable aléatoire $e^{\lambda(S_n - np)}$ possède une espérance car elle est finie. On en déduit en appliquant l'inégalité de Markov que appliquée à la variable $e^{\lambda(S_n - np)}$:

$$P([S_n - np \geq nx]) = P([e^{\lambda(S_n - np)} \geq e^{\lambda nx}]) \leq \frac{E(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$$

- ② Il suffit d'étudier les variations de la fonction $t \mapsto e^{t^2} - e^t + t$ (C'est à vous de le faire)
- En appliquant l'inégalité précédente à $e^{\lambda \cdot p}$ et $e^{-\lambda \cdot q}$, on obtient

$$pe^{\lambda \cdot q} + qe^{-\lambda \cdot p} \leq p(\lambda \cdot q + e^{\lambda^2 q^2}) + q(-\lambda \cdot p + e^{\lambda^2 p^2}) \leq pe^{\lambda^2 q^2} + qe^{\lambda^2 p^2}$$

Comme $\lambda^2 p^2 \leq \lambda^2$ et $\lambda^2 q^2 \leq \lambda^2$, on en déduit : $pe^{\lambda \cdot q} + qe^{-\lambda \cdot p} \leq (p + q)e^{\lambda^2} \leq e^{\lambda^2}$, on a ensuite $E(e^{\lambda(S_n - np)}) \leq (e^{\lambda^2})^n \leq e^{n\lambda^2}$, puis en utilisant l'inégalité de Markov on a

$$P([S_n - np \geq nx]) \leq \frac{e^{n\lambda^2}}{e^{n\lambda x}} = e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}$$

- ③ La fonction $\varphi : \lambda \mapsto \lambda^2 - \lambda x$ admet son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\frac{x}{2}$ et par suite en prenant $\lambda = \frac{x}{2}$ dans la relation précédente, on obtient :

$$P([S_n - np \geq nx]) \leq e^{n\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\right)} \leq e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

- ④ On remarque que :

$$\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right] = [|S_n - np| \geq nx] = [S_n - np \geq nx] \cup [S_n - np \leq -nx]$$

On en déduit que

$$P\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right]\right) \leq P([S_n - np \geq nx]) + P([S_n - np \leq -nx]) \leq 2e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

Exercice :6

On considère un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour lesquels il existe un réel λ tel que la loi de (X, Y) soit définie par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{(i + j)\lambda^{i+j}}{ei!j!}$$

- ① Déterminer λ
- ② Déterminer la loi de X
- ③ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- ④ Calculer $E(2^{X+Y})$

Variables aléatoires discrètes

Solution :6

- ① La famille $\left(\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définit la loi conjointe du couple (X, Y) si, et seulement si cette famille est

sommable de somme égale à 1. Pour i fixé la série $\sum_j \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!}$ est convergente de somme

$$\sigma_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} = \frac{\lambda^i}{e!} (i + \lambda) e^\lambda \text{ et la série } \sum_i \sigma_i \text{ est convergente de somme } \sum_{i=0}^{+\infty} \sigma_i = 2\lambda \cdot e^{2\lambda-1}, \text{ donc}$$

d'après le théorème de Fubini la famille $\left(\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable de somme $2\lambda \cdot e^{2\lambda-1}$. La valeur

de λ est le réel vérifiant $2\lambda \cdot e^{2\lambda-1} = 1$. La fonction $f : x \mapsto 2xe^{2x-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ et comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{2}$

- ② Soit $i \in \mathbb{N}$, on sait que

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} = \frac{\lambda^i}{i!} \left(i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\lambda^j}{j!} \right) = \frac{\lambda^i e^{\lambda-1}}{i!} (i + \lambda)$$

Ce qui donne en remplaçant λ par sa valeur que $\forall i \in \mathbb{N}, P([X = i]) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{i!} \left(i + \frac{1}{2}\right)$. Un calcul

tout à fait analogue aurait prouvé que : $\forall j \in \mathbb{N}, P([Y = j]) = \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{j!} \left(j + \frac{1}{2}\right)$

- ③ On a $P([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{e}$ et $P([X = 0]) \cdot P([Y = 0]) = \frac{1}{4} e^{-1} \neq \frac{1}{e}$. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes

- ④ D'après le théorème de transfert la variable 2^{X+Y} admet une espérance si la famille $\left(2^{i+j} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable c'est à dire que la famille $\left(\frac{(i+j)(2\lambda)^{i+j}}{e!j!} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Par une méthode analogue à celle de la première question (ou λ est remplacé par 2λ) on trouve

que la famille $\left(2^{i+j} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable de somme égale à :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 2^{i+j} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{e!j!} = 4\lambda \cdot e^{4\lambda-1} = 2e. \text{ D'où } E(2^{X+Y}) = 2e$$

Exercice :7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrète dont le coefficient de corrélation est noté $\rho_{X,Y}$

- ① Soit $(a, c) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(b, d) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\rho_{aX+b, cY+d} = \text{sign}(ac) \cdot \rho_{X,Y}$
② Quel est la valeur du coefficient de corrélation de X et Y si Y est une fonction affine de X ?
③ On suppose dans cette question que X et Y admettent des variances non nulle. On pose

$$Z = \left(\frac{1}{\sigma_Y} \right) Y - \left(\frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X} \right) X$$

4.1) Calculer $V(Z)$

4.2) Que peut-on en déduire si $|\rho_{X,Y}| = 1$

Solution :7

- ① Nous avons $\rho_{aX+b, cY+d} = \frac{C(aX+b, cY+d)}{\sigma(aX+b)\sigma(cY+d)} = \frac{acC(X, Y)}{|ac|\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$, donc si a et c sont de même signe, alors $\rho_{aX+b, cY+d} = \rho(X, Y)$

- ② On a $\rho(X, aX+b) = \text{sign}(a)\rho(X, X) \in \{-1, 1\}$

- ③ On a $V(Z) = \frac{1}{\sigma_Y^2} V(Y) + \frac{\rho_{X,Y}^2}{\sigma_X^2} V(X) - 2 \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} C(X, Y) = 1 + 1 - 2\rho_{X,Y}^2 = 2(1 - \rho_{X,Y}^2)$

- ④ Si $\rho_{X,Y} = 1$, alors $V(Z) = 0$ et par suite la variable Z est constante presque par tout égale à $E(Z)$, autrement dit il existe deux réels a et b tels que $Y = aX + b$