



## Compléments de la réduction

Je laisse le soin aux lecteurs de faire les calculs nécessaires pour la recherche du polynôme caractéristique, des valeurs propres, des sous espace propres

### Deuxième exemple

On cherche une famille de suites  $((u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n)$  vérifiant le système suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 13u_n - 12v_n - 6w_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 5v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 18u_n - 18v_n - 8w_n \end{cases}$$

Si on note pour  $n$  entier  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ , le problème se ramène à la recherche des suites  $(X_n)_n$  à termes dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A.X_n$

Avec  $A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$ . Par une récurrence facile on a

$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n.X_0$ , il suffit alors de calculer  $A^n$ . Pour cela on va essayer de diagonaliser la matrice  $A$ . Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est :

$\chi_A = -(X-1)^2(X+2)$  et les sous espaces propres de  $A$  est :

$E_{-2}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$  et  $E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ , la matrice  $A$  est alors

diagonalisable et on a  $A = P.D.P^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui donne  $A^n = P \cdot \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ . L'inverse de la matrice  $P$  est

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , le calcul de  $P^{-1}$  peut se faire par exemple par opération

élémentaire. Tout calcul fait on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = (5 - (-2)^{n+2})u_0 + (-4 + (-2)^{n+2})v_0 + (-2 - (-2)^{n+1})w_0 \\ v_n = (2 + (-2)^{n+1})u_0 + (-1 - (-2)^{n+1})v_0 + (-1 + (-2)^n)w_0 \\ w_n = (6 + 3(-2)^{n+1})u_0 + (-6 - 3(-2)^{n+1})v_0 + (-2 + 3(-2)^n)w_0 \end{cases}$$

On constate que le sous espace de suites  $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$  solutions est alors un espace vectoriel de dimension 3

### Deuxième exemple

On veut déterminer toutes les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  vérifiant

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$ . Si on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ , alors le système est

équivalent à  $X_{n+1} = A.X_n$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  ce qui entraîne alors par récurrence

que  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n.X_0$ . Tout calcul fait on a  $\chi_A = (X-2)^2$  et le sous espace propre associé à la valeur propre 2 de  $A$  est  $E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et par suite  $A$  n'est pas diagonalisable, mais son polynôme caractéristique est scindé donc elle est trigonalisable, on peut alors écrire  $A = P.T.P^{-1}$  avec

$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Et par une récurrence facile ou en décomposant  $T$  sous la forme  $2I + N$  avec  $N$  est nilpotente

## Compléments de la réduction

### Deuxième exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Et par suite } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = (-n2^{n-1})u_0 + (2-n)2^{n-1}v_0 \\ v_{n+1} = (-2-n)2^{n-1}u_0 + 2^n v_0 \end{cases}$$

On constate alors que l'étude des systèmes des suites liées par des relations de récurrences linéaires se ramène au calcul des puissances  $n$ -ème d'une matrice

### Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . L'ensemble des suite complexes  $(u_n)_n$  vérifiant :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  est un sous espace vectoriel complexe de dimension 2

②. Si le polynôme  $X^2 - aX - b$  admet deux racines distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  il est engendré par la famille  $((\lambda^n)_n, (\mu^n)_n)$

②. Si le polynôme  $X^2 - aX - b$  à une racine double  $\mu$ , il est engendré par la famille  $((\mu^n)_n, (n\mu^n)_n)$  Soit  $(u_n)_n$  une suite complexe. Si on pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ , alors la suite  $(u_n)_n$  vérifie la relation de la proposition si, et

seulement si  $X_{n+1} = A.X_n$  avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$  ce qui donne par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n.X_0$ , il faut alors calculer la puissance  $n$ -ème de la matrice  $A$ . Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est  $X^2 - aX - b$ . On distingue alors deux cas si  $\chi_A$  à deux racines distinctes ou une seule

②. Si  $\chi_A$  a deux racines  $\lambda$  et  $\mu$ , alors la matrice  $A$  est diagonalisable, il existe alors une matrice inversible  $P$  d'ordre 2 telle que  $A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$  et par suite

$$A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \text{ ce qui montre alors que } X_n = u_0.Y_n + u_1.Z_n \text{ ou } Y_n \text{ et } Z_n$$

sont deux matrices unicolonne indépendantes de  $A^n$  on en déduit alors l'existence de deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.\lambda^n + \beta.\mu^n$ . Réciproquement toute suite  $(u_n)_n$  de nombres complexes telle que  $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.\lambda^n + \beta.\mu^n$  vérifie bien la relation demandée

②. Dans le cas où  $\chi_A$  admet une seule racine  $\mu$ , alors comme  $A$  n'est pas une matrice scalaire alors elle n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable. Alors il existe une matrice inversible  $P$  d'ordre 2 et une matrice de la forme  $T = \begin{pmatrix} \mu & c \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

telles que  $A = P.T.P^{-1}$  et par une récurrence on a  $T^n = \begin{pmatrix} \mu^n & nc\mu^{n-1} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$ . De la

relation  $X_n = A^n X_0$  on en déduit qu'il existe un couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.v^n + \beta.n\mu^n$ . L'ensemble des solutions est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par la famille des suites  $((\mu^n)_n, (n\mu^n)_n)$

On peut généraliser cette étude à des suites récurrentes linéaire d'ordre  $p$ . Soit  $a_0, \dots, a_{p-1}$  des nombres complexes. L'ensemble des suites complexes  $(u_n)_n$  qui vérifient :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \dots + a_0u_n$ . Est un espace

vectoriel de dimension  $p$ . Si on pose  $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$  et si on suppose que  $P$  est

scindé sur  $\mathbb{K}$  avec  $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$  alors l'espace précédent est :

$$\left\{ \sum_{k=1}^r P_k(n) \lambda_k^n, \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, P_k \in \mathbb{K}_{\alpha_k-1}[X] \right\}$$

## Compléments de la réduction

### Sous espaces caractéristiques

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $u$  un endomorphisme de  $E$ , dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  tel que  $\chi_u = \prod_{k=1}^r (\lambda_k - X)^{m_{\lambda_k}}$

.Le sous espace  $\ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$  est appelé le sous espace caractéristique de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$

.Le lemme de des compositions des noyaux donne :  $E = \bigoplus_{k=1}^r \ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$

✎.

- ① Le sous espace propre associé à une valeur propre  $\lambda_k$  est inclus dans le sous espace caractéristique associé à  $\lambda_k$
- ② Les sous espace caractéristiques sont stables par  $u$
- ③ Les sous espaces caractéristiques permettent de décomposer  $E$  en somme directe des sous espaces stables par  $u$ , il est alors intéressant d'étudier les endomorphismes induit par  $u$  sur ses sous espaces
- ④  $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\dim \ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)^{m_{\lambda_k}} = m_{\lambda_k}$
- ⑤ Si pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $n_k$  désigne la multiplicité de  $\lambda_k$  en tant que racine de  $\pi_u$  alors on a

$$\ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)^{n_k} = \ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$$

(Voir les exercices 7 et 8 pour la solution)

- ⑥ Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , l'endomorphisme induit par  $u - \lambda_i \cdot \text{id}_E$  sur le sous espace caractéristique  $\ker(u - \lambda_i \cdot \text{id}_E)^{m_{\lambda_i}}$  est nilpotent d'indice l'ordre de multiplicité de  $\lambda_i$  en tant que racine de  $\pi_u$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $k \neq i$ , l'endomorphisme induit par  $u - \lambda_k \cdot \text{id}_E$  sur  $\ker(u - \lambda_i \cdot \text{id}_E)$  est un automorphisme de  $\ker(u - \lambda_i \cdot \text{id}_E)$

### Décomposition de Dunford

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $u$  un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme minimal ou caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple  $(d, n)$  d'endomorphisme vérifiant

- \*  $u = d + n$
- \*  $d$  est diagonalisable
- \*  $n$  est nilpotent
- \*  $n$  et  $d$  commutent
- \*  $n$  et  $d$  sont des polynômes en  $u$

#### Démonstration

- ① Posons  $\mathcal{S}p(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  et  $\chi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$  donc d'après le lemme

des noyaux on a :  $E = \bigoplus_{k=1}^r \ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$ . Si on note  $F_i$  le sous espace

caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda_i$  et  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_i$ , alors d'après la partie précédente l'endomorphisme  $u_i - \lambda_i \cdot \text{id}_{F_i}$  de  $F_i$  est nilpotent, notons le  $n_i$ . Il est clair que  $\forall x \in F_i$ ,  $u_i(x) = \lambda_i \cdot x + n_i(x)$  et  $n_i(x) \in F_i$

- ② Soit  $x$  un élément de  $E$  tel que  $x = \sum_{k=1}^r x_k$  avec  $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $x_k \in F_k$ . Considérons les endomorphismes  $d$  et  $n$  de  $E$  définis par :

$$d(x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot p_k(x) \text{ avec } (p_k)_{k \in \llbracket 1, r \rrbracket} \text{ est la famille des projecteurs}$$

associés à la décomposition  $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$  et  $n(x) = \sum_{k=1}^r n_k(x_k)$ . Il est clair que

## Théorème

### Démonstration du théorème

$\forall x \in E, u(x) = d(x) + n(x)$ , il reste alors à prouver que  $n$  est nilpotent,  $d$  est diagonalisable et  $nod = don$ . Soit  $x = \sum_{k=1}^r x_k, x_k \in F_k$ . Par récurrence on a

$\forall k \in \mathbb{N}, n^k(x) = \sum_{i=1}^r n_i^k(x)$ , donc si on choisit  $p$  supérieure à chacun des indices de nilpotence des  $n_i$  par exemple  $p = \dim E$ , il vient  $n^p(x) = 0$  ce qui prouve alors que  $n$  est nilpotent

Ⓢ. L'écriture de  $d$  assure que cet endomorphisme est diagonalisable

Ⓢ. Soit  $x = \sum_{k=1}^r x_k, x_k \in F_k$ , on a  $d(x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot x_k$ , c'est encore une décomposition

de  $d(x)$  dans la  $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$ , alors on a  $n(d(x)) = \sum_{k=1}^r n_k(\lambda_k \cdot x_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot n_k(x_k)$  et

un calcul similaire justifie que  $d(n(x)) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot n_k(x_k)$  ce qui prouve l'égalité et par

suite  $nod = don$

3. Montrons maintenant l'unicité, supposons alors l'existence d'un autre couple  $(d', n')$  vérifiant les mêmes conditions du théorème et montrons que

$d = d'$  et  $n = n'$ . On a  $d - d' = n' - n$ , il suffit alors de montrer que  $d - d'$  est à la fois diagonalisable et nilpotent pour cela on va montrer que  $d$  et  $d'$  commutent et on utilise le résultat de l'exercice de la codiagonalisation. On a  $n'od' = n'od'$  donc  $d'ou = d'o(n' + d') = d'on' + d'^2 = n'od' + d'od' = uod'$  et

comme  $d = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot p_k$  et chaque  $p_k$  est un polynôme en  $u$  (voir Td) alors  $d'$  et  $d$

commutent et par suite ils sont codiagonalisables donc  $d - d'$  est diagonalisable et comme  $n \circ n' = (u - d)o(u - d') = (u - d')o(u - d)$  alors  $n' - n$  est nilpotent et par suite  $d - d'$  est nilpotent et diagonalisable donc il est nul et par suite  $d = d'$  et donc  $n = n'$

## Exercice :1. Sous espace stable par l'opérateur de dérivation

Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  défini par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], D(P) = P'$$

Déterminer les sous espace vectoriels stables par l'endomorphisme  $D$

**Solution :1**

Le sous espace nul et l'espace  $\mathbb{K}[X]$  sont stables par  $D$ , cherchons les sous espaces stables non triviaux. Soit  $F$  un sous espace stable par l'opérateur de dérivation, on va distinguer deux cas :

① Si  $F$  est de dimension finie non nul  $r$ .

Soient  $(P_1, \dots, P_r)$  une base de  $F$  et  $m = \max(\deg P_1, \dots, \deg P_r)$ . Il est clair que  $F \subset \mathbb{K}_m[X]$ .

Soit  $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $\deg P_{i_0} = m$ , la famille  $(P_{i_0}, P'_{i_0}, \dots, P_{i_0}^{(m)})$  est une famille de degré échelonnée donc elle est libre et par suite  $\dim(\text{Vect}(P_{i_0}, P'_{i_0}, \dots, P_{i_0}^{(m)})) = m + 1$ , or  $\text{Vect}(P_{i_0}, P'_{i_0}, \dots, P_{i_0}^{(m)}) \subset \mathbb{K}_m[X]$ , alors

$\text{Vect}(P_{i_0}, P'_{i_0}, \dots, P_{i_0}^{(m)}) = \mathbb{K}_m[X]$ . comme  $F$  est stable par  $D$ , alors  $\text{Vect}(P_{i_0}, P'_{i_0}, \dots, P_{i_0}^{(n)}) \subset F$  c'est à dire  $\mathbb{K}_m[X] \subset F$  donc  $F = \mathbb{K}_m[X]$

② Si  $F$  est de dimension infinie. Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, F \not\subset \mathbb{K}_n[X]$  ce qu'est équivalent de dire que

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in F, m = \deg P > n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in F, m = \deg P > n$ . La famille  $(P, P', \dots, P^{(m)})$  est une famille libre de  $\mathbb{K}_m[X]$ , comme famille de degré échelonnée d'éléments de  $\mathbb{K}_m[X]$ , de cardinal est égale à  $m + 1$ , alors  $\mathbb{K}_m[X] = \text{Vect}(P, P', \dots, P^{(n)})$  et par stabilité de  $F$  par  $D$ , on a  $\text{Vect}(P, P', \dots, P^{(n)}) \subset F$ , c'est à dire que  $\mathbb{K}_m[X] \subset F$  et comme  $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_m[X]$ , alors  $\mathbb{K}_n[X] \subset F$  et ceci pour tout entier naturel  $n$  donc  $F = \mathbb{K}[X]$

### Exercice :2.L'ordre et le rang d'une matrice

Soit  $n$  un entier non nul et  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels.

- ① On suppose que  $A^2 + A + I_n = 0$ . Montrer que  $n$  est pair
- ② On suppose que  $A^3 + A^2 + A = 0$ . Montrer que le rang de  $A$  est pair

**Solution :2**

- ① Le polynôme  $X^2 + X + 1$  est annulateur de  $A$  donc les valeurs propres de  $A$  sont dans  $\{j, j^2\}$  et par suite si  $n$  est impaire, alors  $\chi_A$  admet au moins une racine réelle c'est à dire que  $A$  admet une valeur propre réelle ce qu'est absurde donc  $n$  est paire
- ② On a  $A(A^2 + A + I_n) = 0_n$  donc d'après le lemme des noyaux

$$\ker u_A \oplus \ker(u_A^2 + u_A + id_{\mathbb{K}^n}) = \mathbb{K}^n$$

Ou  $u_A$  désigne l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Le sous espace  $F = \ker(u_A^2 + u_A + id_{\mathbb{K}^n})$  est stable par  $u_A$ , notons  $v$  l'endomorphisme induit par  $u_A$  sur  $F$ . Si  $F$  est de dimension impaire, alors  $\chi_v$  est de degré impaire, donc admet au moins une racine réelle c'est à dire que  $v$  aura au moins une valeur propre réelle  $\lambda$ , et comme le polynôme  $X^2 + X + 1$  est un polynôme annulateur de  $v$ , alors  $\lambda$  est une racine réelle de ce polynôme ce qui est absurde, donc la dimension de  $F$  est paire. Or d'après le théorème du rang on a  $rg(u_A) = \dim F$ , d'où le résultat

### Exercice :3.

Soit  $A$  une matrice inversible d'ordre  $n$  à coefficient dans  $\mathbb{C}$ . Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice  $A^{-1}$

**Solution :3**

$$\begin{aligned} \text{Soit } \lambda \text{ un scalaire non nul, on a : } \chi_{A^{-1}}(\lambda) &= \det(A^{-1} - \lambda \cdot I_n) = \det(A^{-1}(I_n - \lambda \cdot A)) \\ &= \frac{(-\lambda)^n}{\det A} \det\left(A - \frac{1}{\lambda} \cdot I_n\right) = \frac{(-\lambda)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

**Autrement**

On montre facilement que  $Sp(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in Sp(A) \right\}$ , comme  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , alors on a pour tout  $x \in \mathbb{C}^*$

$$\chi_{A^{-1}}(x) = (-1)^n \prod_{k=1}^n \left(x - \frac{1}{\lambda_k}\right) = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n \lambda_k} x^n \prod_{k=1}^n \left(\lambda_k - \frac{1}{x}\right) = \frac{(-x)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

### Exercice :4.

Soit  $A$ ,  $B$  et  $P$  trois matrices carrées non nulles à coefficients dans  $\mathbb{C}$

- ① Montrer que  $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$
- ② Montrer que si  $AP = PB$ , alors  $A$  et  $B$  ont au moins une valeur propre commune

**Solution :4**

- ① (i) : ( $\Rightarrow$ ). Supposons que  $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ , le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , donc  $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$  et par suite  $\chi_A(B) = (B - \lambda_1 \cdot I_n) \cdot \dots \cdot (B - \lambda_n \cdot I_n)$ , l'hypothèse assure que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $B - \lambda_i \cdot I_n$  est inversible, c'est à dire que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i \notin Sp(B)$ , ce qui veut dire que  $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$
- (ii) : ( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$ , alors  $\forall \lambda \in Sp(A)$ ,  $\lambda \notin Sp(B)$  c'est à dire que  $B - \lambda \cdot I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . Et comme  $\chi_A(B) = (B - \lambda_1 \cdot I_n) \cdot \dots \cdot (B - \lambda_n \cdot I_n)$ , alors  $\chi_A(B)$  est inversible comme produit de matrices inversibles
- ② Supposons que  $AP = PB$ , alors par une récurrence facile on a :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k P = P B^k$ . Et par linéarité on a  $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $Q(A)P = P Q(B)$ , en particulier pour  $Q = \chi_A$ , on a  $0_n = P \chi_A(B)$ , ce qui entraîne alors que  $0_n = P \cdot \chi_A(B)$  et par suite  $\chi_A(B)$  est non inversible et d'après la question précédente  $Sp(A) \cap Sp(B) \neq \emptyset$ , d'où le résultat

### Exercice :5

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées à coefficients complexes. Montrer les propositions suivantes sont équivalentes :

- ①  $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$
- ②  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \Rightarrow X = 0$

### Exercice :5(Suite)

- 3  $\chi_B(A)$  est inversible  
 4  $A$  et  $B$  n'ont pas de valeur propre commune

#### Solution :5

- ① ( $1 \Rightarrow 2$ ) En prenant  $C = 0_n$ , alors d'après l'hypothèse il existe une unique matrice  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AX - XB = 0$  et comme la matrice nulle est aussi solution, alors  $X = 0_n$
- ② ( $2 \Rightarrow 1$ ) Notre hypothèse nous permet de dire que l'endomorphisme
- $$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X \mapsto AX - XB \end{cases}$$
- est injective et comme on est en dimension finie, alors c'est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  d'où le résultat
- ③ ( $3 \Leftrightarrow 4$ ) est immédiate d'après l'exercice précédent
- ④ Pour ( $2 \Rightarrow 3$ ), on montre sa contraposée supposons, alors que  $\chi_A(B)$  est non inversible, donc  $A$  et  $B$  admettent une valeur propre commune  $\lambda$ , soit alors  $U$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$  et  $V$  un vecteur propre de  ${}^tB$  associé à  $\lambda$  et posons  $X = U {}^tV$ , il est clair que  $X$  est non nul car c'est une matrice de rang 1 et on a  $AX = AU {}^tV = \lambda.X$  et  $XB = U {}^tVB = \lambda.X$  ce qui prouve que la négation de 2 est vraie
- ⑤ ( $3 \Rightarrow 2$ ). Supposons que  $\chi_A(B)$  est inversible et soit  $X$  une matrice d'ordre  $n$  vérifiant  $AX = XB$ , alors par une récurrence facile on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k X = XB^k$  et par linéarité on a  $\chi_A(A)X = X\chi_A(B) = 0_n$ , alors l'inversibilité de  $\chi_A(B)$  entraîne que  $X = 0_n$  d'où le résultat

### Exercice :6

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

- ①  $A$  est nilpotente  
 ②  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls  
 ③  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$

#### Solution :6

**Remarque :** Si  $T$  est une matrice triangulaire supérieure (inférieure) de coefficients diagonaux  $t_1, \dots, t_n$ , alors pour tout entier naturel non nul  $k$  la matrice  $T^k$  est triangulaire supérieure (inférieure) de coefficients diagonaux  $t_1^k, \dots, t_n^k$

- ① ( $1 \Rightarrow 2$ ) La matrice  $A$  est nilpotente donc elle admet 0 comme seule valeur propre et par suite  $A$  est trigonalisable donc semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres donc nuls
- ② ( $2 \Rightarrow 3$ ) Soit  $P$  une matrice inversible et  $T$  une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont nuls tels que  $A = P^{-1}TP$ , alors par une récurrence facile on montre que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = P^{-1}T^kP$ , et par suite  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$
- ③ ( $3 \Rightarrow 1$ ). Supposons que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$ , montrons que  $A$  est nilpotente c'est à dire que son spectre est réduit à  $\{0\}$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $A$  admet au moins une valeur propre non nulle, soit alors  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres non nulles de  $A$  de multiplicité respectivement  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_r}$ , comme on travaille dans  $\mathbb{C}$ , alors on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^r m_{\lambda_i} \lambda_i^k$ . On va s'intéresser aux  $r$  égalités suivantes :  $\forall k \in [1, r]$ ,  $\sum_{i=1}^r m_{\lambda_i} \lambda_i^k = 0$ . Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} m_{\lambda_1} \\ m_{\lambda_2} \\ \vdots \\ m_{\lambda_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

 **Soution :6(Suite)**

Ceci d'une part d'autre part on a  $\det A = \left( \prod_{k=1}^r \lambda_k \right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = \left( \prod_{k=1}^r \lambda_k \right) \cdot \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \right) \neq 0$

Ce qui entraine que  $\begin{pmatrix} m_{\lambda_1} \\ m_{\lambda_2} \\ \vdots \\ m_{\lambda_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  ce qui contredit la définition de la multiplicité d'une valeur propre, on conclut alors que  $A$  est nilpotent

 **Exercice :7.Sous espaces caractéristiques**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Pour toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  de multiplicité  $m_\lambda$ , on pose  $F_\lambda = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{m_\lambda}$  appelé sous espace caractéristique associé à  $\lambda$ . Montrer que pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$  le sous espace caractéristique associé à  $\lambda$  est de dimension la multiplicité de  $\lambda$

 **Solution :7**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  de multiplicité  $m_\lambda$ , donc

$$\chi_u = (X - \lambda)^{m_\lambda} Q(X) \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

D'après le théorème décomposition des noyaux on a  $E = F_\lambda \oplus \ker Q(u)$ . Posons  $d_\lambda = \dim F_\lambda$ , on a  $F$  est Stable par  $u$  donc

$$\forall x \in F, (u_F - \lambda \cdot \text{id}_F)^{m_\lambda} = 0_{\mathcal{L}(F)}$$

Ce qui montre que  $u_F - \lambda \cdot \text{id}_F$  est nilpotent et par suite  $\chi_{v-\lambda \cdot \text{id}_F} = (-X)^d$ . Or

$$\begin{aligned} \chi_v &= \det(v - X \cdot \text{id}_F) = \det((v - \lambda \cdot \text{id}_F) - (X - \lambda) \cdot \text{id}_F) \\ &= \chi_{v-\lambda \cdot \text{id}_F}(X - \lambda) = (-1)^d (X - \lambda)^d \end{aligned}$$

Comme  $F$  et  $\ker Q(u)$  sont stables, alors  $\chi_u = \chi_v \chi_w$  avec  $w$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\ker Q(u)$  et avec la convention  $\chi_w = 1$  si  $\ker Q(u) = \{0_E\}$ . Donc  $(X - \lambda)^{m_\lambda} Q = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w : (*)$ . Si  $\lambda$  est une racine de  $\chi_w$  alors il existe

$x \in \ker Q(u)$ ,  $w(x) = u(x) = \lambda \cdot x$ , et comme  $Q(u)(x) = Q(\lambda) \cdot x = 0$ , alors  $Q(\lambda) = 0$  ce qui absurde, donc  $\chi_w(\lambda) \neq 0$ , et par suite

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (X - \lambda) \wedge \chi_w = 1$$

Et de l'égalité (\*) en déduit que  $(X - \lambda)^{m_\lambda}$  divise  $(X - \lambda)^d \chi_w$  et comme  $\chi_w \wedge (X - \lambda)^{m_\lambda}$ , alors d'après Gauss on a  $(X - \lambda)$  divise  $(X - \lambda)^d$  ce qui entraine que  $m_\lambda \leq d$ . De même de l'égalité (\*) on a  $(X - \lambda)^d$  divise  $(X - \lambda)^{m_\lambda} Q$  et comme  $Q \wedge (X - \lambda)^d = 1$ , alors  $(X - \lambda)^d$  divise  $(X - \lambda)^{m_\lambda}$  ce qui entraine que  $d \leq m_\lambda$  et par suite l'égalité

 **Exercice :8**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle,  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  de multiplicité  $m_\lambda$  et  $p$  un entier naturel non nul.

- ① Montrer que la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\pi_u$  est le plus petit entier naturel vérifiant

$$\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^p = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{p+1}$$

- ② En déduire que :  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda \Leftrightarrow \lambda$  est une racine simple de  $\pi_u$

 **Solution :8**

- ① .Notons  $n_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $\pi_u$  et posons  $\pi_u = (X - \lambda)^{n_\lambda} Q$  avec  $Q(\lambda) \neq 0$  et  $P = (X - \lambda)^q \cdot Q$

- 1.1 Si  $q > n_\lambda$ , alors  $\pi_u$  divise le polynôme  $Q$  d'après le lemme de décomposition des noyaux on a

$$E = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda} \oplus \ker Q(u) = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q \oplus \ker Q(u)$$

Ce qui entraine alors que  $\dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda} = \dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q$ , or la suite  $(\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante au sens de l'inclusion (Voir les grands classiques d'algèbre linéaire), ce qui nous permet de conclure que  $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda}$

### Solution :8(Suite)

1.2 Si  $q < n_\lambda$ , alors le polynôme  $P = (X - \lambda)^q \cdot Q$  n'est pas divisible par  $\pi_u$ , donc il n'est pas annulateur de  $u$  donc en appliquant toujours le lemme de décomposition des noyaux, on a  $\ker P(u) = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q \oplus \ker Q(u)$  et comme  $P(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $\ker P(u)$  est inclus strictement dans  $E = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda} \oplus \ker Q(u)$  en passant aux dimensions on a :

$$\dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q + \dim \ker Q(u) < \dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda} + \dim \ker Q(u)$$

Ce qui entraîne que  $\dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q < \dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda}$  et par suite que  $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q$  est inclus strictement dans  $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda}$ . On a alors à démontrer que

$$\forall q > n_\lambda, \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda} = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q$$

ET

$$\forall q < n_\lambda, \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^q \neq \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{n_\lambda}$$

① ( $\Rightarrow$ ). Si  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$ , alors d'après l'exercice précédent on a :

$\dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = \dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{m_\lambda}$  ce qui entraîne que le plus petit entier non nul  $p$  vérifiant  $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^p = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{p+1}$  est égale à 1 c'est à dire que la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\pi_u$  est égale à 1

( $\Leftarrow$ ). Si  $\lambda$  est une racine simple de  $\pi_u$ , alors  $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^2$  ce qui entraîne alors que  $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{m_\lambda}$  et par suite d'après l'exercice précédent on a  $\dim \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = m_\lambda$

### Exercice :9.Caractérisation de la multiplicité $m_{\pi_\lambda}$ d'une valeur propre

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $E$ .

① Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^2$

(ii)  $E_\lambda(u) \oplus \mathcal{I}m(u - \lambda \text{Id}_E) = E$

(iii)  $E_\lambda(u)$  possède un supplémentaire stable par  $u$

(iv) La dimension de  $E_\lambda(u)$  est égale à la multiplicité de  $\lambda$  dans le polynôme caractéristique de  $u$ .

(v)  $\lambda$  est une racine simple du polynôme minimale de  $u$

② Montrer que dans ces conditions,  $\mathcal{I}m(u - \lambda \text{Id}_E)$  est le seul supplémentaire de  $E_\lambda(u)$  stable par  $u$

### Solution :9

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  de multiplicité  $m_\lambda$ , on a alors

$$\chi_u = (X - \lambda)^{m_\lambda} Q, \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

1 ( $i \Rightarrow ii$ ). Supposons que  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^2$ , alors d'après le théorème du rang il suffit de montrer que  $E_\lambda(u) \cap \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = \{0\}$ . Soit alors  $x \in E_\lambda(u) \cap \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$ , on a

$$(u - \lambda \cdot \text{id}_E)(x) = 0 \text{ et } \exists a \in E, x = (u - \lambda \cdot \text{id}_E)(a)$$

Ce qui entraîne que  $(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^2(a) = 0$  c'est à dire que  $a \in \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^2$  et comme

$$\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^2 = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E), \text{ alors } x = (u - \lambda \cdot \text{id}_E)(a) = 0 \text{ d'où le résultat}$$

( $ii \Rightarrow iii$ ) Si  $E_\lambda(u) \oplus \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = E$ , alors il est clair que  $\mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$  est un sous supplémentaire de  $E_\lambda(u)$  stable par  $u$  ( $iii \Rightarrow iv$ ).

Soit  $F$  un supplémentaire stable par  $u$  de  $E_\lambda(u)$ , notons  $v$  (resp  $w$ ) l'endomorphisme induit sur  $E_\lambda(u)$  (resp  $F$ ), alors on a  $\chi_u = \chi_v \chi_w$ , or  $v = \lambda \cdot \text{id}_{E_\lambda}$ , alors  $\chi_u = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda} \cdot \chi_w$ . En raisonnant de la même façon que l'exercice précédent, on montre que  $\chi_w(\lambda) \neq 0$  et enfin de l'égalité

$$(X - \lambda)^{m_\lambda} Q = \chi_w(\lambda - X)^{\dim E_\lambda(u)} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, Q \wedge (X - \lambda)^p = \chi_w \wedge (X - \lambda)^p = 1$$

On en déduit que  $(X - \lambda)^{m_\lambda}$  divise  $(X - \lambda)^{\dim E_\lambda}$  et  $(X - \lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$ , divise  $(X - \lambda)^{m_\lambda}$  ce qui entraîne alors que  $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$

Pour ( $iv \Rightarrow v$ ) et  $v \Rightarrow i$  voir l'exercice précédent

① On suppose que  $E_\lambda(u) \oplus \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = E$ . Soit  $F$  un sous espace supplémentaire stable par  $u$  de  $E_\lambda(u)$ . Montrons que  $F = \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$ , notons  $w$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ ,  $w'$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$  et  $v$  l'endomorphisme induit sur  $E_\lambda(u)$  par  $u$ . On a  $\chi_u = \chi_v \chi_w = \chi_v \cdot \chi_{w'}$  ce qui entraîne que  $\chi_w = \chi_{w'}$ . Soit  $x \in F$  tel que  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_\lambda(u)$  et  $x_2 \in \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$ . Il est facile à voir que  $\chi_w(u)(x) = \chi_w(u)(x_1) + \chi_w(u)(x_2)$ , c'est à dire que  $\chi_w(w)(x) = \chi_w(\lambda) \cdot x_1 + \chi_{w'}(w')(x_2)$ , et par suite  $\chi_w(\lambda) \cdot x_1 = 0$  et comme  $\chi_w(\lambda) \neq 0$ , alors  $x_1 = 0$  ce qui entraîne alors que  $F \subset \mathcal{I}m(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$  et comme ils ont même dimension alors ils sont égaux

### Exercice :10

Un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace  $E$  de dimension finie est dit semi simple si tout sous espace stable par  $u$  admet un supplémentaire stable par  $u$ . Montrer que  $u$  est semi simple si, et seulement si il est diagonalisable

### Solution :10

- ① Supposons que  $u$  est diagonalisable, soit  $B$  une base de diagonalisation de  $u$  et  $F$  un sous espace stable par  $u$ . Si  $B_1$  une base de  $F$ , d'après le théorème de la base incomplète, il existe une sous famille  $B_2$  de  $B$  telle que  $(B_1, B_2)$  est une base de  $E$ . Le sous espace  $G = \text{Vect}(B_2)$  est un sous espace de  $E$  stable par  $u$
- ② Supposons que tout sous espace de  $E$  stable par  $u$  possède un supplémentaire stable par  $u$ . Soit  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  le spectre de  $u$ , si on pose  $F = \bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(u)$ , alors il est clair que  $F$  est non réduit au singleton  $\{0\}$ , soit  $G$  un supplémentaire stable par  $u$  de  $F$  dans  $E$ . Si  $G \neq \{0_E\}$ , alors l'endomorphisme  $u_G$  induit sur  $G$  par  $u$  admet au moins une valeur propre dans  $\mathbb{C}$ , donc un vecteur propre associé à cette valeur propre est alors un élément non nul de  $F$  et de  $G$  ce qui est absurde, donc  $G = \{0\}$  et par suite  $\bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(u) = E$

### Exercice :11

Montrer que le polynôme minimal d'un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$  espace  $E$  de dimension finie non nulle admet un nombre fini de diviseurs unitaires

### Solution :11

On pose  $\pi_u = \prod_{k=1}^r P_k^{\alpha_k}$  avec  $P_1, \dots, P_r$  sont des polynômes irréductibles unitaires de  $\mathbb{K}[X]$ . Remarquons que si  $D$  est un diviseur unitaire de  $\pi$ , alors  $D = \prod_{k=1}^r P_k^{\alpha'_k}$  avec  $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\alpha'_k \in \llbracket 0, \alpha_k \rrbracket$ . On vérifie aisément en utilisant l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{D}_{\pi_u} \rightarrow \prod_{k=1}^r \llbracket 0, \alpha_k \rrbracket \\ D \mapsto (\alpha'_1, \dots, \alpha'_r) \end{cases}$$

est une bijection et par suite  $\text{Card}(\mathcal{D}_{\pi_u}) = \prod_{k=1}^r (1 + \alpha_k)$ . Avec  $\mathcal{D}_{\pi_u}$  désigne l'ensemble des diviseurs unitaires de  $\pi_u$

### Exercice :12

Soit  $E$  un espace de dimension finie non nulle  $n$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ ,

- ① Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal noté  $\pi_{x,u}$  tel que  $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$
- ② Vérifier que  $\pi_{x,u}$  divise  $\pi_u$
- ③ En déduire que  $\{\pi_{x,u}, x \in E \text{ et } x \neq 0_E\}$  est fini

### Solution :12

Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$

- ① On montre facilement que  $I_{x,u} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  contenant  $\pi_u$ , donc il est engendré par un unique polynôme unitaire  $Q$ . Par définition du générateur unitaire d'un idéal non nul de  $\mathbb{K}[X]$  est clair que le polynôme  $Q$  est celui qu'on cherche
- ② On a déjà dit à la question précédente que  $\pi_u \in I_{x,u}$ , donc  $\pi_{x,u}$  divise  $\pi_u$
- ③ D'après l'exercice précédent le polynôme  $\pi_u$  admet un nombre fini de diviseurs unitaires, donc l'ensemble  $\{\pi_{x,u}, x \in E, x \neq 0_E\}$  est fini

### Exercice :13

Soit  $E$  un espace de dimension finie non nulle  $n$  et  $u$  un endomorphisme cyclique de  $E$  c'est à dire il existe un vecteur non nul  $x_0$  tel que  $E = \text{Vect}(u^k(x_0))$

- 1 Montrer que l'application  $\varphi_{x_0,u} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow E \\ P \mapsto P(u)(x_0) \end{cases}$  est une application linéaire, surjective de noyau

### Exercice :13(Suite)

$\pi_u, \mathbb{K}[X]$

- 2 Montrer que  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$
- 3 En déduire que  $\pi_u = \chi_u$
- 4 Donner la matrice de  $u$  dans cette base

### Solution :13

- ① La linéarité de  $\varphi_{x,u}$  est clair

Soit  $y \in E$ , alors on a

$$y \in \text{Vect}(u^k(x)) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N}^*, \exists (\alpha_0, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, y = \sum_{k=0}^r \alpha_k u^k(x_0) = P(u)(x_0)$$

Avec  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$  d'où la surjectivité de  $\varphi_{x,u}$

Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , on a

$$P \in \ker \varphi_{x,u} \Leftrightarrow P(u)(x_0) = 0$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$P(u)(u^k(x_0)) = P(u)ou^k(x_0) = u^k o P(u)(x_0) = u^k(P(u)(x_0)) = 0_E$$

L'endomorphisme  $P(u)$  est nulle sur une famille génératrice, ce qui entraîne alors que  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et par suite que  $P \in \pi_u, \mathbb{K}[X]$ , et donc  $\ker \varphi_{x,u} \subset \mathbb{K}[X]$ , l'autre inclusion est évidente, donc  $\ker \varphi_{x,u} = \pi_u, \mathbb{K}[X]$

- ② Soit  $x \in E$ , d'après la première question on a :  $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $x = P(u)(x_0)$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a  $x = R(u)(x_0)$  tel que  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $\chi_u$  et comme  $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ , alors  $x \in \text{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  et par suite  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est une famille génératrice de  $E$ , donc c'est une base de  $E$
- ③ On sait que  $\deg \pi_u \leq n$ . Supposons que  $\deg \pi_u < n$  et posons  $\pi_u = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ , on a par définition de  $\pi_u$ , on a  $\pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  ce qui entraîne que  $\pi_u(u)(x_0) = 0$ , c'est à dire  $a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \dots + a_r u^r(x_0) = 0_E$  et comme  $(x_0, u(x_0), \dots, u^r(x_0))$  est une sous famille de la base  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ , alors elle est libre donc  $\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ , donc  $\pi_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$  ce qui est absurde donc  $r = n$  et comme  $\pi_u$  divise  $\chi_u$ , alors  $\pi_u = (-1)^n \chi_u$
- ④ Si on pose  $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0)$ , alors la matrice de  $u$  dans la base  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

### Exercice :14

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Montrer l'équivalence suivante :  $\{0_E\}$  et  $E$  sont les seuls sous espaces stables par si, et seulement si  $\chi_u$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$

### Solution :14

- ① ( $\Rightarrow$ ). Supposons que  $\{0_E\}$  et  $E$  sont les seuls sous espaces stables par  $u$ . Pour tout vecteur non nul  $z$  de  $E$ , le sous espace  $E_u(z) = \text{Vect}(u^k(z))$  est un sous espace stable par  $u$  et comme il n'est pas nul, alors il est égale à  $E$ , et par suite l'endomorphisme  $u$  est cyclique et donc  $\pi_{z,u} = \pi_u = (-1)^n \chi_u$ . Soit  $P$  un diviseur unitaire de  $\chi_u$  différent de 1 et distincts de  $\chi_u$ , ce qui entraîne que  $\chi_u = P.Q$  avec  $\deg Q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ , posons  $y = P(u)(x)$ . Si  $y \neq 0_E$ , alors  $\pi_{y,u} = \pi_u$  et on a  $Q(u)(y) = (PQ)(u)(y) = \pi_{y,u}(u)(y) = 0$  et par suite  $\pi_u$  divise  $Q$  ce qui est absurde, donc  $P(u)(x) = 0_E$  et donc  $\pi_u$  divise  $P$  et par suite  $P = \pi_u$  ce qui est absurde, donc  $P$  est soit 1 soit  $\pi_u$  et comme  $\deg \pi_u \geq 1$ , alors  $\pi_u$  est irréductible
- ② ( $\Leftarrow$ ). Supposons que  $\chi_u$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  et soit  $F$  un sous espace non nul stable par  $u$ . Soit  $x$  un élément non nul de  $F$ . D'après l'exercice (7) le polynôme  $\pi_{x,u}$  est un diviseur de  $\pi_u$  donc de  $\chi_u$  et comme il est irréductible alors  $\pi_{x,u} = \chi_u$  ce qui entraîne alors que  $E = \text{Vect}(u^k(x)) \subset F$ , car  $F$  est stable par  $u$

 **Exercice :15**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$

- ① Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
- ② Dans cette question on se propose de montrer dans le cas générale  
 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$  par plusieurs méthodes

**A).Première méthode**

- ① Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\chi_{J_r B} = \chi_{B J_r}$
- ② En déduire que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

**B).Deuxième méthode**

Soit  $x \in \mathbb{K}$ , on pose pour  $t$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $P(t) = \chi_{(A-t.I_n)B}(x) - \chi_{B(A-t.I_n)}(x)$

- ① Montrer que  $P$  est une fonction polynômiale en  $t$
- ② Montrer que  $P$  s'annule une infinité de fois sur  $\mathbb{K}$
- ③ En déduire que  $\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x) = 0$  et puis que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

**C).Troisième méthode**

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- ① Etablir que :

$$\begin{pmatrix} \lambda.I_n - BA & B \\ 0 & \lambda.I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ 0 & \lambda.I_n - AB \end{pmatrix}$$

- ② En déduire que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

**D).Quatrième méthode**

- ① Montrer que l'ensemble des matrice inversible à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ② En déduire que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

 **Solution :15**

- ① Si  $A$  est inversible, alors on a  $AB = A(BA)A^{-1}$ , donc  $AB$  et  $BA$  sont semblables donc elles ont même polynôme caractéristique

② **A).Première méthode**

- ① Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \text{ posons } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

avec

$$B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}), B_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}), B_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K}) \text{ et } B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

On a

$$J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } B J_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ * & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

ces deux matrices sont des matrices triangulaires par blocs donc on a  $\chi_{J_r B} = \chi_{B J_r} = (-x)^{n-r} \chi_{B_1}$

- ② Posons  $r = \text{rg}(A)$ , alors il existe deux matrices inversible  $P$  et  $Q$  telle que  $A = P J_r Q$ , donc :

$$\chi_{AB} = \chi_{P(J_r Q B)} \underset{\text{Question 1}}{=} \chi_{J_r(Q B P)} \underset{\text{Question 2}}{=} \chi_{Q(B P J_r)} \underset{\text{Question 1}}{=} \chi_{B(P J_r Q)} = \chi_{BA}$$

**B).Deuxième méthode.** Soit  $(x, t) \in \mathbb{K}^2$ .

- ① Si on pose  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  et  $B = (b_{i,j})_{i,j}$ , alors le coefficient générique de  $(A - t.I_n)B$  est :  
 $C_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n (a_{i,k} - t\delta_{i,k})b_{k,j}$  et par suite celui de  $(A - t.I_n)B - xI_n$  est  $d_{i,j}(t) = C_{i,j}(t) - x\delta_{i,j}$ , par suite

on a  $\det((A - t.I_n)B - xI_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n d_{k,\sigma(k)}(t)$  et comme  $C_{i,j}$  sont des fonctions polynomiales

en  $t$  de degré inférieure ou égale à 1, alors  $d_{i,j}$  aussi et par suite  $\det((A - t.I_n)B - xI_n)$  est une fonction polynômiale en  $t$  de degré inférieure ou égale à  $n$ . De même pour  $\det(B(A - t.I_n) - xI_n)$  est une fonction polynômiale en  $t$  de degré inférieure ou égale à  $n$  ce qui entraîne que  $P$  est une fonction polynômiale en  $t$  de degré inférieure ou égale à  $n$

- ② On a  $\forall t \in \mathbb{K}, t \notin Sp(A), A - t.I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et d'après la première question on a  $P(t) = 0$

### Solution :15(Suite)

Et comme  $Sp(A)$  est fini et  $\mathbb{K}$  est infini, alors  $P$  admet une infinité de point d'annulation et par suite  $P = 0$  ce qui entraîne que  $P(0) = 0$ , c'est à dire que  $\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x) = 0$  et ceci pour tout  $x$  dans  $\mathbb{K}$ , donc le polynôme  $\chi_{AB} - \chi_{BA}$  admet une infinité de racines donc il est nul d'où l'égalité :  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

#### C).Troisième méthode

$$\textcircled{1} \text{ On a } \begin{pmatrix} \lambda.I_n - BA & B \\ 0 & \lambda.I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda.I_n - BA) + BA & B \\ \lambda.A & \lambda.I_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ \lambda.A & \lambda.I_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ 0 & \lambda.I_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ \lambda.A & \lambda.I_n \end{pmatrix}$$

$\textcircled{2}$  On a alors :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda.I_n - BA & B \\ 0 & \lambda.I_n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det(\lambda.I_n - BA)$$

et

$$\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda.I_n & B \\ 0 & \lambda.I_n - AB \end{pmatrix} = \lambda^n \det(\lambda.I_n - AB)$$

On a donc :  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\det(AB - \lambda.I_n) = \det(BA - \lambda.I_n)$  ce qui entraîne que le polynôme  $\det(AB - X.I_n) - \det(BA - X.I_n)$  admet une infinité de racine donc il est nul c'est à dire  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

#### D)Quatrième méthode

L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de dimension finie donc toutes ses normes sont équivalentes, on est alors libre de choisir chaque fois la norme qui nous convient

- $\textcircled{1}$  L'application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  qui à chaque  $A$  associé son déterminant est continue et comme  $\mathbb{K}^*$  est un ouvert de  $\mathbb{K}$ , alors son image réciproque par  $\det$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  à savoir  $GL_n(\mathbb{K})$   
 Montrons maintenant la densité. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  comme le spectre de  $A$  est fini, alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \geq n_0$ ,  $\frac{1}{p} \notin Sp(A)$  si on pose alors pour  $p \geq n_0$ ,  $A_p = A - \frac{1}{p}.I_n$ , alors la suite  $(A_p)_{p \geq n_0}$  est une suite de matrices inversibles de limite la matrice  $A$  ce qui prouve la densité de  $GL_n(\mathbb{K})$  dans l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $\textcircled{2}$  Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Par densité de  $GL_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors il existe une suite  $(A_p)_p$  de matrices inversibles telle que  $A_p \rightarrow A$ . D'après la première question on a  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\chi_{A_p B} = \chi_{B A_p}$   
 Le produit matriciel est une application bilinéaire continue, alors les suites  $(A_p B)_p$  et  $(B A_p)_p$  convergent respectivement vers  $AB$  et  $BA$   
 L'application  $M \mapsto \chi_M$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  comme composée de deux applications continues à savoir  $\det$ , c'est un résultat du cours et  $M \mapsto M - X I_n$  qu'est une application lipschitzienne. donc en passant à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

### Exercice :16

Montrer qu'une matrice de permutation à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est diagonalisable

### Solution :16

On note  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des matrices de permutations, il est clair que  $(\mathcal{P}_n, \times)$  est un groupe. L'application :

$$\Sigma : \begin{cases} S_n \rightarrow \mathcal{P}_n \\ \sigma \mapsto P_\sigma \end{cases}$$

Est un isomorphisme de groupe donc l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  est fini de cardinal  $n!$  et donc d'après le théorème de Lagrange vu dans la fiche 1 on a  $\forall \sigma \in S_n$ ,  $P_\sigma^{n!} = I_n$  ce qui entraîne que le polynôme  $X^{n!} - 1$  est un polynôme annulateur de  $P_\sigma$  et comme il est scindé et à racine simple dans  $\mathbb{C}$ , alors elle est diagonalisable

### Exercice :17

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  une matrice à coefficients réels dont le polynôme caractéristique est scindé. Montrer que :  $\text{tr}(A^2 + A + I_n) \geq \frac{3n}{4}$

### Solution :17

Le polynôme  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice triangulaire supérieure  $T$  à coefficients réelles telles que  $A = PTP^{-1}$ .

 **Solution :17(Suite)**

On a alors  $A^2 + A + I_n = P(T^2 + T + I_n)P^{-1}$  et par suite si on désigne par  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ , alors on a

$$\text{tr}(A^2 + A + I_n) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k^2 + \lambda_k + 1)$$

Or  $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ , ce qui entraîne alors que  $\text{tr}(A^2 + A + I_n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} = \frac{3n}{4}$

 **Exercice :18**

Soit  $n$  un entier non nul et  $A$  une matrice carrée à coefficients réels telle que  $A^3 = A + I_n$ . Montrer que  $\det A > 0$

 **Solution :18**

La matrice  $A$  est inversible car elle annule le polynôme  $P = X^3 - X - 1$  à coefficient constant non nul, donc son déterminant est non nul. Le polynôme  $P$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Le polynôme  $P$  a trois racines complexes : une racine réelle  $\alpha$  et une racine complexe non réelle  $\beta$  et son conjugué  $\bar{\beta}$ . Posons  $m_\alpha$  la multiplicité de la valeur propre  $\alpha$  ( $m_\alpha = 0$  si  $\alpha$  n'est pas valeur propre de  $A$ ) et  $m_\beta$  la multiplicité de la valeur propre  $\beta$  ( $m_\beta = 0$  si  $\beta$  n'est pas valeur propre de  $A$ ).

Remarquons que  $\alpha \cdot \beta \cdot \bar{\beta} = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3}$  avec  $a_0$  (resp  $a_n$ ) est le coefficient constant (dominant) de  $P$  ce qui entraîne alors que  $\alpha \cdot |\beta|^2 = 1 > 0$  ce qui prouve alors que  $\alpha > 0$

On a déterminant de  $A$  est alors égale  $\alpha^{m_\alpha} |\beta|^{2 \cdot m_\beta} > 0$

 **Exercice :19**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de rang  $r$ . Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de  $u$  de degré  $r + 1$

 **Solution :19**

Le rang de  $u$  est égale à  $r$ , alors d'après le théorème du rang la dimension du  $\ker u$  est égale à  $n - r$ , soit alors  $B = (e_1, \dots, e_{n-r}, \dots, e_n)$  une base de  $E$  adaptée à  $\ker u$ . La matrice de  $u$  dans cette base est de la forme

$M = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & U \\ 0_r & V \end{pmatrix}$  par une récurrence facile on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & UV^{k-1} \\ 0_r & V^k \end{pmatrix}$  et par linéarité on a

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], MQ(M) = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & UQ(V) \\ 0_r & VQ(V) \end{pmatrix}$$

Si on pose  $P = X\chi_V$ , alors on a  $P(M) = 0_n$  et comme  $\deg P = 1 + \deg \chi_V = 1 + r$ , alors le polynôme  $P$  convient

 **Exercice :20. Une preuve du théorème du Cayley Hamilton**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

① On suppose qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $(u^i(x_0))_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$  est une base de  $E$ . On pose

$$u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

1.1 Calculer  $\chi_u$  en fonction des  $a_k$ .

1.2 En déduire que  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

② Pour  $x \in E$  tel que  $x \neq 0_E$ , on pose

$$E_u(x) = \text{Vect} \{u^k(x_0), k \in \mathbb{N}\}$$

2.1 Montrer que  $E_u(x)$  admet une base de la forme  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ .

2.2 En déduire que  $\chi_u(u)(x) = 0$ .

③ Retrouver le théorème de Cayley Hamilton

**Solution :20**

①

1.1 La matrice de  $u$  relativement à la base  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

En effectuant l'opération  $L_1 \leftrightarrow L_1 + \sum_{k=2}^n X^{k-1} L_k$ , et en développant par rapport à la première ligne on a  $\chi_u = (-1)^n \left( X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$

1.2 Pour montrer que  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , il suffit de montrer que  $\chi_u(u)$  est nulle dans la base  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ . Soit alors  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  on a

$$\chi_u(u) \left( u^k(x_0) \right) = \left( \chi_u(u) \circ u^k \right) (x_0) = u^k (\chi_u(u)(x_0)) = u^k(0_E) = 0_E \text{ d'où le résultat}$$

②

2.1 Posons  $A_u(x) = \left\{ k \in \mathbb{N}, (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x_0)) \text{ est libre} \right\}$ , on a  $A_u(x)$  est non vide car il contient 1 et il est majoré par la dimension de  $E_u(x)$ , donc admet un plus grand élément noté  $p$   
 On montre maintenant par récurrence que :

$$\forall k \geq p, u^k(x) \in \text{Vect} \left( u^l(x), l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right)$$

Pour  $k = p$  c'est clair

Soit  $k \geq p$ , supposons que  $u^k(x) \in \text{Vect} \left( u^l(x), l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right)$ . On a :

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x) &= u \left( u^k(x) \right) \in u \left( \text{Vect} \left( u^l(x), l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right) \right) \\ &= \text{Vect} (u(x), \dots, u^p(x)) \subset \text{Vect} \left( u^l(x), l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall k \geq p, u^k(x) \in \text{Vect} \left( u^l(x), l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right)$$

, c'est à dire que  $E_u(x) = \text{Vect} \left( u^l(x), l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \right)$  ce qui est équivalent de dire que  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est une famille génératrice de  $E_u(x)$  et comme la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre, alors c'est une base de  $E_u(x)$

2.2 L'espace  $E_u(x)$  est stable par  $u$ , si on note  $v$  l'endomorphisme, alors  $E_u(x)$  admet une base de la forme  $(x, v(x), \dots, v^{p-1}(x))$ , donc  $\chi_v(v)(x) = 0$  ce qui entraîne alors que  $\chi_u(u)(x) = 0$

③ Soit  $x \in E$ , si  $x = 0$ , alors  $\chi_u(u)(x) = 0$  et si  $x \neq 0_E$ , alors d'après la question précédente on a  $\chi_u(u)(x) = 0$ , ce qui entraîne alors que  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

**Exercice :21. Commutant d'un endomorphisme**

Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on note par

$$\mathcal{C}(f) = \{ g \in \mathcal{L}(E), fog = gof \}$$

① Montrer que :  $\mathcal{C}(f)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$

② Montrer qu'un endomorphisme  $g$  est un élément de  $\mathcal{C}(f)$  si et seulement si chaque sous espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .

③ En déduire que  $\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_\lambda^2$  où  $m_\lambda$  est la multiplicité de la valeur propre de  $\lambda$ .

④ On suppose que les valeurs propres de  $f$  sont simples. Montrer que  $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}(f)$ .

### Solution :21

- ① C'est clair
- ② .  $(\Rightarrow)$  .C'est du cours  
 $(\Leftarrow)$ .Supposons que tous les sous espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$ , comme  $f$  est diagonalisable, alors  $(*) : E = \bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(f)$ , donc pour montrer que  $g$  commute avec  $f$  il suffit de montrer que ceci à lieu sur tout sous espace propre de  $f$ . Soit  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $x \in E_{\lambda_k}(f)$ , on a  $fog(x) = f(g(x)) = \lambda_k \cdot g(x)$  car  $g(x) \in E_{\lambda_k}(f)$  ceci d'une part d'autre part on a  $gof(x) = g(f(x)) = g(\lambda_k \cdot x) = \lambda_k \cdot g(x)$  ce qui prouve l'égalité de  $gof$  et  $fog$  sur chaque sous espace propre de  $f$ , et par suite l'égalité
- ③ Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$ . D'après la question précédente  $g$  est un élément de  $\mathcal{C}_f$  si et seulement si, la matrice de  $g$  dans une base de  $E$  adaptée à la décomposition  $(*)$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{E_{\lambda_1}(f)} & 0 \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_{E_{\lambda_2}(f)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_{E_{\lambda_r}(f)} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}_f \longrightarrow \prod_{k=1}^r \mathcal{M}_{\dim(E_{\lambda_k}(f))}(\mathbb{K}) \\ g \longmapsto (A_{E_{\lambda_1}(f)}, \dots, A_{E_{\lambda_r}(f)}) \end{cases}$$

L'application  $\varphi$  est un isomorphisme d'espace vectoriel, donc les deux espaces ont même dimension et par suite  $\dim \mathcal{C}_f = \sum_{k=1}^r (\dim(E_{\lambda_k}))^2$

- ④ Si on suppose que les valeurs propres de  $f$  sont simples, alors  
 $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\dim(E_{\lambda_k}) = 1$ , ce qui entraîne que  $\dim \mathcal{C}_f = n$ . Le degré du polynôme minimal de l'endomorphisme  $f$  est égale à  $n$ , car il admet  $n$  racines distinctes, ce qui entraîne alors que  $\dim \mathbb{K}[f] = n$  et qu'il admet la famille  $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$  comme base (Voir le cours de l'arithmétique des entiers et des polynômes). Or  $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}_f$ , alors on a égalité et par suite  $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}_f$

### Exercice :22.Diagonalisation simultanée

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables qui commutent. Montrer que  $f$  et  $g$  admettent une base de diagonalisation commune.

### Solution :22

On a  $f$  est diagonalisable, alors si on désigne par  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres distinctes de  $f$ , alors on a  $E = \bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(f)$ , et comme  $f$  et  $g$  commutent, alors pour tout entier  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , le sous espace  $E_{\lambda_k}(f)$  est stable par  $g$ , notons alors  $g_k$  l'endomorphisme induit par  $g$  sur  $E_{\lambda_k}(f)$ , comme  $g$  est diagonalisable, alors pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , l'endomorphisme  $g_k$  est diagonalisable donc il existe une base  $B_k$  de l'espace  $E_{\lambda_k}(f)$  formée des vecteurs propres de  $g_k$  donc de  $g$ . Si on pose  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ , alors  $B$  est une base de  $E$  formée à la fois des vecteurs propres de  $f$  et de  $g$  donc c'est une base de diagonalisation commune de  $f$  et  $g$

### Exercice :Diagonalisation simultanée -Généralisation

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n$  et  $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille d'endomorphisme diagonalisables de  $E$  qui commutent deux à deux avec  $m \geq 2$  Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}_m$  de  $E$  de diagonalisation de tous les endomorphismes  $u_1, \dots, u_m$

### Solution :23

On va raisonner par récurrence sur  $m$ .

①. **Initialisation** : Pour  $m = 2$  c'est fait à l'exercice 22

②. **Hérédité** : Soit  $m \geq 2$  supposons le résultat à l'ordre  $m - 1$  et prouvons le à l'ordre  $m$ . Soit alors  $(u_1, \dots, u_m)$  une famille d'endomorphismes diagonalisables de  $E$  qui commutent deux à deux. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u_1$  et  $E_\lambda(u_1)$  le sous espace propre de  $E$  associé à  $\lambda$ , comme les endomorphisme  $u_2, \dots, u_m$  commutent avec  $u_1$ , alors  $E_\lambda(u_1)$  est stable par  $u_i$ , notons alors pour  $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$ ,  $v_i$  l'endomorphisme induit sur  $E_\lambda(u_1)$  par  $u_i$ . Il est clair que  $v_2, \dots, v_m$  sont diagonalisables et commutent deux à deux donc par l'hypothèse de récurrence il existe

### Solution :23

Une base  $\mathcal{B}_\lambda$  de  $E_\lambda(u_1)$  de diagonalisation commune des endomorphismes  $v_2, \dots, v_m$ . Il est clair aussi que cette base diagonalise l'endomorphisme  $v_1$  induit sur  $E_\lambda(u)$  par  $u_1$ , puisque  $v_1 = \lambda \cdot \text{id}_{E_\lambda(u_1)}$ . Il suffit alors de réunir les bases  $\mathcal{B}_\lambda$ , pour  $\lambda$  décrivant le spectre de  $u_1$ , pour obtenir une base de  $E$  qui diagonalise tous les  $u_i$ . D'où le résultat à l'ordre  $m$

### Exercice :24

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  diagonalisables ayant même spectre et telles que  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables

### Solution :24

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres distinctes de  $A$  (et  $B$ ) et  $m_1, \dots, m_p$  et  $m'_1, \dots, m'_p$  les ordres de multiplicités respectivement de  $A$  et de  $B$ , il s'agit de montrer que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, m_i = m'_i$ . L'égalité  $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  s'écrit  $\sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k = \sum_{i=1}^p m'_i \lambda_i^k$  ce qui équivaut de dire  $\sum_{i=1}^p \lambda_i^k (m_i - m'_i) = 0$ , ce qui se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 - m'_1 \\ \vdots \\ m_p - m'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres sont distinctes donc la matrice de Vandermonde  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$  est inversible et par suite  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, m_i = m'_i$ , donc les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables à une même matrice diagonale ce qui entraîne alors  $A$  et  $B$  sont semblables

### Exercice :25

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , telle que

$$A^3 = A + 6I_n$$

Montrer que :  $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, \det A = 2^p 3^q$  avec  $p + 2q = n$

### Solution :25

Le polynôme  $P = X^3 - X - 6$  est un polynôme annulateur de  $A$ , il est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  :

$$P = (X - 2)(X + 1 + i\sqrt{2})(X + 1 - i\sqrt{2})$$

Il en résulte que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , car elle annule un polynôme scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et que  $\mathcal{S}p_{\mathbb{C}}(A) \subset \{2, -1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}\}$ . Si  $-1 + i\sqrt{2}$  est une valeur propre de  $A$  de multiplicité  $q$ , alors  $-1 - i\sqrt{2}$  est aussi une valeur propre de multiplicité aussi égale à  $q$ , si  $2$  est une valeur propre de  $A$  notons  $p$  sa multiplicité. Si  $-1 + i\sqrt{2}$  (resp  $2$ ) n'est pas une valeur propre de  $A$ , on convient de poser  $q = 0$  (resp  $p = 0$ ) : on a alors :

$$\det A = 2^p (-1 + i\sqrt{2})^q (-1 - i\sqrt{2})^q = 2^p (|-1 + i\sqrt{2}|^2)^q = 2^p 3^q$$

Il est alors clair que  $p + 2q = n$

### Exercice :26

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficient réels et  $B$  la transposée de sa comatrice. Montrer que tout vecteur propre de  $A$  est vecteur propre de  $B$

### Solution :26

On a  $AB = BA = \det A \cdot I_n$

- ① Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors  $A$  est inversible et  $B = (\det A) \cdot A^{-1}$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors elle est non nulle, soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . On a  $AX = \lambda X$  ce qui entraîne que  $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$

 **Solution :26**

Et donc  $BX = \frac{\det A}{\lambda} X$  ce qui prouve alors que  $X$  est un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\frac{\det A}{\lambda}$

2 Si  $\text{rg}(A) \leq n - 2$ , alors dans ce cas  $B$  est la matrice nulle et par suite tout vecteur non nul de  $E$  est un vecteur propre de  $B$  en particulier ceux de  $A$

① Si  $\text{rg}(A) = n - 1$ , alors dans ce cas le rang de  $B$  est 1, voir la fiche révision sup, et par suite  $B$  admet 0 comme valeur propre d'ordre au moins égale à  $n - 1$ . Soit  $U$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0, si on désigne par  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  associé canoniquement à  $A$ , alors son noyau est une droite vectoriel engendré par le vecteur  ${}^tU = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Comme  $\det A = 0$  alors  $AB = BA = 0_n$  ce qui entraîne alors que  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $AV_j = 0$  ou  $V_j$  désigne la jème colonne de  $B$  ce qui entraîne alors que les  ${}^tV_j$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés à la valeurs propre 0 ce qui entraîne alors que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_j \in \mathbb{K}, V_j = \lambda_j \cdot {}^tU$$

Si on pose  $Y = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , on a  $B = UY$  ce qui entraîne que

$$BU = UYU = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right) U$$

Ce qui veut dire que  $U$  est un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \alpha_k$

Dans le cas ou  $U$  est un vecteur propre associé à une valeur propre  $\lambda$  non nulle. On a alors  $BAU = \lambda BU$  et comme  $\lambda$  est non nulle, alors  $BU = 0$  et par suite  $U$  est un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre 0

 **Exercice :27**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$  et  $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . A quelle condition nécessaire et suffisante la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  est diagonalisable

 **Solution :27**

Ⓢ. **Rappel.** Si  $M$  est une matrice carré à coefficients dans  $\mathbb{C}$  dont le polynôme caractéristique est

$$\chi_M = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}. \text{ Alors la matrice } M \text{ est diagonalisable si, et seulement si } M \text{ annule le polynôme}$$

$$P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$$

Ⓢ. Le polynôme caractéristique de la matrice  $M$  est  $\chi_M = (X - 1)^2(X - b)^2$ .

Ⓢ. Si  $b = 1$ , alors la matrice  $M$  est diagonalisable si, et seulement si  $M = I_4$  ce qu'est équivalent à  $a = c = 0$  et  $C = 0_2$

Ⓢ. Si  $b \neq 1$ , alors dans ce cas  $M$  est diagonalisable si, et seulement si  $(M - I_4)(M - b.I_4) = 0_4$ . Un calcul direct montre que cette condition est équivalente à  $a = c = 0$ .

Ⓢ. **Résumé :** La matrice  $M$  est diagonalisable si, et seulement si  $(a = c = 0)$  et  $(b \neq 1 \text{ ou } C = 0_2)$

 **Exercice :28**

**Exercice :28 Une équation matricielle**

Montrer que l'équation :  $X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'a pas de solutions dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  pour tout entier naturel  $r \geq 2$

 **Solution :28**

Ⓢ. **Rappel.** Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes

Ⓢ. La matrice  $A$  est nilpotente

Ⓢ. Le polynôme caractéristique est  $\chi_A = X^n$

Ⓢ. La matrice  $A$  est trigonalisable et 0 est sa seule valeur propre

Ⓢ. Le polynôme minimale de  $A$  est  $\pi_A = X^r$  avec  $r$  est l'indice de nilpotence de  $A$

**Solution**

\*. Supposons qu'il existe un entier naturel  $r \geq 2$  et une matrice  $A$  d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{C}$  tels que  $A^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Il est clair que  $A^{2r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ce qui entraîne que  $A$  est nilpotente et par suite  $A^2 = 0$  et comme  $r$  est supérieur ou égale à 2, alors  $A^r = 0_2$  ce qu'est absurde. D'ou le résultat

### Exercice :29

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  une matrice d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et  $B$  la matrice d'ordre  $2n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  définie par  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ . Montrer que  $B$  est diagonalisable si, et seulement si  $A$  est nulle

### Solution :29

  $(\Leftarrow)$ . Si  $A = 0_n$ , alors la matrice  $B$  est nulle et par suite elle est diagonalisable

  $(\Rightarrow)$ . Supposons que  $B$  est diagonalisable. Par une récurrence facile on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$  et par

linéarité on a

$\forall P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$  et en particulier  $\pi_B(B) = \begin{pmatrix} \pi_B(A) & A\pi_B(A) \\ 0 & \pi_B(A) \end{pmatrix} = 0_{2n}$  ce qui entraîne

alors que  $\begin{cases} \pi_B(A) = 0_n & (1) \\ A\pi'_B(A) = 0 & (2) \end{cases}$ . Ce qui entraîne alors que  $\pi_A$  divise  $\pi_B$  et comme  $B$  est diagonalisable alors  $\pi_B$

est à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et donc  $\pi_A$  aussi. Par définition de  $B$  on a  $\chi_B = \chi_A^2$  ce qui entraîne alors que les matrices  $B$  et  $A$  ont le même spectre et par suite  $\pi_B$  et  $\pi_A$  aussi et par suite  $\pi_A = \pi_B$ .

 Comme  $A\pi'_B(A) = 0$  alors  $\pi_A$  divise  $X\pi_B = X\pi'_A$  et comme ils ont même degré et unitaires alors  $\pi_A = X\pi'_A$ . Ce qui entraîne que  $\pi_A = X^r$  (Voir exercice 12 Solution fiche 0) et comme  $\pi_A = \pi_B$  n'a que des racines simples alors  $\pi_A = 0$  et donc par définition de  $\pi_A$ , on a  $\pi_A(A) = A = 0$  d'où le résultat

### Exercice :30

Soit  $A$  une matrice d'ordre  $d$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  à valeurs propres réelles vérifiant :  $A^5 + A^3 + A = 3I_d$ . Montrer que  $A = I_d$

### Solution :30

Le polynôme  $P = X^5 + X^3 + X - 3$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Le polynôme dérivé  $P' = 5X^4 + 3X^2 + 1$  n'a pas de racines réelles et par suite le polynôme  $P$  admet au plus une racine réelle et comme  $P(1) = 0$  donc 1 est la seule racine réelle de  $P$ . On a  $P$  est divisible par  $\pi_A$  et comme  $\pi_A$  a toutes ses racines réelles alors  $\pi_A = X - 1$  ce qui entraîne alors que  $A = I_d$

### Exercice :31

On considère l'application  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto -A + \text{tr}(A).I_n \end{cases}$  Etudier la diagonalisabilité de  $\varphi$

### Solution :31

Soit  $\lambda$  un réel et  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On a  $\varphi(A) = \lambda.A \Leftrightarrow (1 + \lambda)A = \text{tr}(A).I_n$

 Si  $\text{tr}(A) = 0$ , alors  $\lambda = -1$  et par suite  $-1$  est une valeur propre de  $\varphi$  dont le sous espace propre est  $E_{-1}(\varphi) = \ker \text{tr}$  qui est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donc de dimension  $n^2 - 1$  et par suite  $-1$  est une valeur propre d'ordre au moins égale à  $n^2 - 1$ .

 Soit  $A$  une matrice de trace non nulle, alors  $\varphi(A) = \lambda.A$  est équivalent à :  $A = \left( \frac{\text{tr}(A)}{1 + \lambda} \right).I_n$  ce qui entraîne

alors que  $\text{tr}(A) = n \left( \frac{\text{tr}(A)}{1 + \lambda} \right)$  et donc  $\lambda = n - 1$  et que  $E_{n-1} = \text{Vect}(I_n)$

**En conclusion**, l'endomorphisme  $\varphi$  admet deux valeurs propres à savoir  $-1$  et  $n - 1$ , les sous espaces propres associés sont de dimension respectives  $n^2 - 1$  et  $1$ , donc de somme  $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ce qui prouve alors que  $\varphi$  est diagonalisable et que son polynôme caractéristique est  $\chi_\varphi = (-1)^{n^2} (X + 1)^{n^2 - 1} (X - n + 1)$

 **Exercice :32**

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices carrées d'ordre 2. Montrer qu'il existe un triplet  $(a, b, c)$  de réels non tous nuls tel que  $aA + bB + cC$  possède une valeur propre double

 **Solution :32**

• Si la famille  $(A, B, C)$  est liée alors il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $aA + bB + cC = 0_2$  et la matrice nulle admet des valeurs propres doubles d'où le résultat

• Si la famille  $(A, B, C)$  est libre alors le sous espace  $F$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $(A, B, C)$  est de dimension 3 et le sous espace  $G$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  engendré par  $E_{1,1}$  et  $E_{1,2}$  c'est à dire  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  est de dimension 2. L'inégalité  $\dim F + \dim G > \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  entraîne que  $F \cap G$  contient une matrice non nulle  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  cette matrice admet  $a$  comme valeur propre double, d'où le résultat

 **Exercice :32**

Existe-t-il une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients strictement positifs?

 **Solution :33**

Si une telle matrice  $A$  existe alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la matrice  $A^k$  est aussi à coefficients strictement positifs ce qui est absurde

 **Exercice :33**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On suppose que  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Déterminer  $\chi_{P(A)}$

 **Solution :33**

Comme  $\chi_A$  est scindé alors  $A$  est trigonalisable, donc il existe une matrice inversible  $Q$  telle que

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ et par suite } P(A) = Q \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & P(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}. \text{ On en}$$

déduit alors que  $\chi_{P(A)} = \prod_{i=1}^n (X - P(\lambda_i))$

 **Exercice :34**

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose que  $u$  est diagonalisable. Montrer que  $uov = vov$  si, et seulement si tout sous espace propre de  $u$  est stable par  $v$

 **Solution :34**

• Pour l'implication directe c'est du cours

• Supposons que chaque sous espace propre de  $u$  est stable par  $v$ . On pose  $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ , puisque

$E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$  alors, pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $x = \sum_{i=1}^r x_{\lambda_i}$  avec  $x_{\lambda_i} \in E_{\lambda_i}(u)$  et alors

$(vou)(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v(x_{\lambda_i})$ , or  $(uov)(x) = \sum_{i=1}^r u(v(x_{\lambda_i})) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v(x_{\lambda_i})$  car  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $v(x_{\lambda_i}) \in E_{\lambda_i}(u)$ , ce qui montre alors l'égalité

### Exercice :35

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie avec  $\mathcal{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Montrer que la projection  $p_k$  de  $E$  sur le sous espace propre  $E_{\lambda_k}(u)$  parallèlement à  $\bigoplus_{i=1, i \neq k}^r E_{\lambda_i}(u)$  est donnée par :

$$p_k = \prod_{i=1, i \neq k}^r \left( \frac{u - \lambda_i \cdot \text{id}_E}{\lambda_k - \lambda_i} \right)$$

### Solution :35

Comme  $u$  est diagonalisable alors son polynôme minimale est  $\pi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ . La décomposition en éléments simples de la fraction  $\frac{1}{\pi_u}$  est  $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i}{X - \lambda_i}$  avec  $\alpha_k = \frac{1}{\prod_{i=1, i \neq k}^r (\lambda_k - \lambda_i)}$ , cette décomposition permet

d'obtenir l'égalité de Bezout :  $\sum_{k=1}^r \alpha_k \left( \prod_{i=1, i \neq k}^r (X - \lambda_i) \right) = 1$  ce qui entraîne alors que :

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^r \alpha_k \left( \prod_{i=1, i \neq k}^r (u - \lambda_i \cdot \text{id}_E) \right) (x)$$

Comme  $\pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  alors de l'égalité précédente on obtient :  $(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E) \circ \left( \prod_{i=1, i \neq k}^r (u - \lambda_i \cdot \text{id}_E) \right) (x) = 0_E$ ,

on déduit alors que  $\alpha_k \cdot \left( \prod_{i=1, i \neq k}^r (u - \lambda_i \cdot \text{id}_E) \right) (x) \in \ker(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)$ , c'est à dire que les projecteurs  $p_k$  s'écrivent

$$p_k = \alpha_k \left( \prod_{i=1, i \neq k}^r (u - \lambda_i \cdot \text{id}_E) \right) \text{ avec } \alpha_k = \frac{1}{\prod_{i=1, i \neq k}^r (\lambda_k - \lambda_i)}.$$

En particulier ces projecteurs sont des polynômes en  $u$

### Exercice :36

Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls. Soit  $G$  un sous groupe fini de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\forall A \in G, A^2 = I_n$

- ① Montrer que  $G$  est commutatif
- ② Soit  $H$  un sous groupe strict de  $G$  et  $D \in G$  tel que  $D \notin H$ . Montrer que  $H' = H \cup D.H$  est un sous groupe de  $G$  et de cardinal  $2 \cdot \text{card}(H)$
- ③ Montrer que pour tout entier naturel  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $2^k \leq \text{card} G$ , alors il existe  $(a_1, \dots, a_k) \in G^k$  tel que  $H_k = \left\{ \prod_{i=1}^k a_i^{j_i}, (j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1\}^k \right\}$  soit un sous groupe de  $G$  de cardinal  $2^k$
- ④ En déduire que  $G$  est de cardinal une puissance de 2
- ⑤ Montrer que les groupes  $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{G}_m(\mathbb{K})$  sont isomorphes si, et seulement si  $n = m$

### Solution :36

1 Soit  $(A, B) \in G^2$ , on a  $I_n = (AB)^2 = ABAB$  donc  $AB = (AA)BA(BB) = BA$ . Donc  $G$  est commutatif

① Il est clair que  $H \subset H'$ . Soit  $(A, B) \in H^2$ , alors

⊄. Si  $(A, B) \in H^2$ , alors  $AB \in H \subset H'$

⊄. Si  $(A, B) \in (D.G)^2$  alors il existe  $(M, N) \in H^2$  tel que  $A = D.N$  et  $B = D.M$  et par suite

$$AB = (D.N)(D.M) = D^2.NM = NM \in H \subset H'$$

⊄. Si  $A \in H$  et  $B \in D.H$ , alors  $AB \in D.H$  et par suite  $H'$  est stable par la multiplication matricielle et comme tout élément de  $G$  est égal à son inverse alors  $H'$  est un sous groupe de  $G$ .

⊄. D'autre part  $H \cap D.H = \phi$  donc  $\text{card}(H') = \text{card} H + \text{card}(D.H)$ . Or l'application  $f_D : H \rightarrow D.H$  qui

 **Solution :36**

à chaque  $A$  de  $H$  fait correspondre  $D.A$  est une bijection donc  $\text{card}H' = 2\text{card}H$

2 On va raisonner par récurrence sur  $k$ .

✎. Pour  $k = 0$ , il suffit de poser  $H_0 = \{I_n\}$ .

✎. Soit  $k$  un entier supposons l'existence d'une famille  $(a_1, \dots, a_k) \in G^k$  telle que

$H_k = \left\{ \prod_{i=1}^k a_i^{j_i}, (j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1\}^k \right\}$  soit un sous groupe de cardinal  $2^k$  et  $2^{k+1} \leq \text{card } G$ . Donc  $H$  est

un sous groupe strict de  $G$  soit alors  $a_{k+1}$  un élément de  $G$  n'appartenant pas  $H_k$ . D'après la question précédente  $H_{k+1} = H_k \cup a_{k+1}.H_k$  est un sous groupe de  $G$  de cardinal  $2.\text{card}H_k = 2^{k+1}$  engendré par

$H_k.(a_{k+1}H_k)$  c'est à dire de la forme  $H_{k+1} = \left\{ \prod_{i=1}^{k+1} a_i^{j_i}, (j_1, \dots, j_{k+1}) \in \{0, 1\}^{k+1} \right\}$ . Puisque  $G$  est fini, le

processus s'arrête forcément, donc le cardinal de  $G$  est une puissance de 2 c'est à dire de la forme  $2^p$ . Il reste à montrer que  $p \leq n$

✎. Tous les éléments de  $G$  sont diagonalisable car annulés par le polynôme  $X^2 - 1$  scindé à racines simples dans  $\mathbb{K}$  et comme elles commutent deux à deux alors ils sont simultanément diagonalisable, c'est à dire qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que pour tout élément  $M$  de  $G$  la matrice  $P^{-1}.M.P$  est diagonale et comme les valeurs propres possibles de  $M$  sont 1 ou  $-1$  alors  $D = P^{-1}.M.P$  est de la forme  $D = \text{diag}(\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M))$  avec  $\lambda_i(M) \in \{-1, 1\}$ . On en déduit que l'application

$M \mapsto (\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M))$  est un morphisme injective de groupe donc elle réalise un isomorphisme de  $G$  dans un sous groupe du groupe multiplicatif  $\{-1, 1\}$  et comme le cardinal d'un sous groupe divise le cardinal du groupe et le cardinal du groupe  $\{-1, 1\}$  est égale à  $2^n$  alors  $2^p \leq 2^n$  et par suite  $p \leq n$

3 Supposons qu'il existe un isomorphisme de groupe  $\phi$  de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{GL}_m(\mathbb{K})$ . On désigne par  $G$  le sous groupe des matrices diagonales de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  dont les coefficients diagonaux sont dans  $\{-1, 1\}$ . Le cardinal de ce sous groupe est  $2^n$  dont tous les éléments sont d'ordre inférieur ou égale à 2 et par suite son image par  $\phi$  est un sous groupe de  $\mathcal{GL}_m(\mathbb{K})$  dont tous les éléments sont d'ordre inférieur ou égale à 2, donc  $n \leq m$ . En raisonnant avec l'isomorphisme  $\phi^{-1}$  on déduit qu'on a aussi  $m \leq n$ , ce qui donne en définitive  $n = m$

 **Exercice :37**

Soit  $G$  un sous groupe commutatif de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  dont tous les éléments sont d'ordre fini. Nous noterons  $r_G = \max_{A \in G} (\mathcal{O}(A))$ . Montrer que  $G$  est de cardinal fini de cardinal une un diviseur de  $r_G^n$

 **Solution :37**

Tous les éléments de  $G$  sont diagonalisable car ils sont annulés par le polynôme  $X^r - 1$  scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et comme  $G$  est commutatif alors ils sont simultanément diagonalisables, soit alors  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que pour toute matrice  $M$  élément de  $G$ , on a  $P^{-1}.M.P$  est diagonale de la forme  $\text{diag}(\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M))$  et comme  $M^{r_G} = I_n$  alors les  $\lambda_i(M)$  sont des racines  $r$ -ème de l'unité. On en déduit alors que l'application  $M \mapsto (\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M))$  est un morphisme injectif de groupe et par suite  $G$  est isomorphe à un sous groupe de  $\mathcal{U}_r^n$ , il est donc fini de cardinal divisant  $r_G^n$

 **Exercice :38**

Soit  $A$  une matrice carrée inversible d'ordre 6 à coefficients dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$  et  $\text{tr}(A) = 8$ . Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$

 **Solution :38**

Comme  $A$  inversible alors  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$  entraîne que  $A^2 - 3A + 2I_6 = 0$  et par suite le polynôme  $P = (X - 2)(X - 1)$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A$  et comme il est scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}$  alors  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$  et du spectre inclus dans  $\{1, 2\}$  si on désigne par  $p$  et  $q$  les multiplicités de 1 et 2 respectivement avec la convention  $p = 0$  (resp  $q = 0$ ) si 1 (resp 2) n'est pas une valeur propre de  $A$ , alors  $\chi_A = (X - 1)^p(X - 2)^q$ . Comme le degré de  $\chi_A$  est égale à 6 et  $\text{tr}(A) = 8$  alors  $p + q = 6$  et  $p + 2q = 8$  ce qui donne  $p = 4$  et  $q = 2$ , puis que  $\chi_A = (X - 1)^4(X - 2)^2$