

Exercice :1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E .

- On suppose qu'il existe un élément a de E et un réel strictement positif tel que $B_f^{N_1}(a, r) = B_f^{N_2}(a, r)$. Montrer que $N_1 = N_2$.
- On suppose dans cette question que $B_{N_1}(a, r) = B_{N_2}(a, r)$. Montrer que $N_1 = N_2$.

Solution 1 1. Soit x un vecteur non nul de E , on a $y = \frac{r}{N_1(x)}x + a$ est un élément de $B_f^{N_1}(a, r)$ donc $y \in B_f^{N_2}(a, r)$ ce qui veut dire que : $N_2(y - a) = \frac{r}{N_1(x)}N_2(x) \leq r$ ce qui entraîne alors que $N_2(x) \leq N_1(x)$ et comme N_1 et N_2 jouent un rôle symétrique, alors $N_1(x) \leq N_2(x)$ et par suite $N_1(x) = N_2(x)$ et ceci étant vrai pour tout x non nul de E et comme $N_1(0_E) = N_2(0_E)$, alors $\forall x \in E$, $N_1(x) = N_2(x)$ ce qui prouve alors que $N_1 = N_2$.

- Soit x un vecteur non nul de E . On a

$$\frac{r}{N_1(x)}x + a \notin B_{N_1}(a, r) = B_{N_2}(a, r)$$

c'est à dire que $N_2\left(\frac{r}{N_1(x)}x\right) \geq r$, ce qui équivaut à $N_2(x) \geq N_1(x)$ et comme N_1 et N_2 jouent un rôle symétrique, alors on a $N_1(x) = N_2(x)$ et comme $N_1(0) = N_2(0)$, alors $N_1 = N_2$.

Exercice :2

Soit A une partie non vide convexe de E . Montrer que $\bar{A}$ et A^0 sont convexes.

Solution 2 Soit A une partie convexe de E .

- Soit $(x, y) \in \bar{A}^2$ et $t \in [0, 1]$. D'après la caractérisation d'un point adhérent, on a :

$$\exists ((x_n)_n, (y_n)_n) \in (A^N)^2, x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow y$$

Comme A est convexe de E , alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, tx_n + (1-t)y_n \in A^2$$

Et comme $tx_n + (1-t)y_n \rightarrow tx + (1-t)y$, alors $tx + (1-t)y \in \bar{A}$, ce qui prouve alors que $\bar{A}$ est convexe de E .

- Soit $(x, y) \in (A^0)^2$, $t \in [0, 1]$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Il s'agit de montrer que $a = tx + (1-t)y \in A^0$. Il est clair que si $t \in \{0, 1\}$, alors $tx + (1-t)y \in A^0$, supposons alors que $t \in]0, 1[$, et considérons l'application de E dans E définie par $h : z \mapsto tz + (1-t)y$, il est clair que :

$$h(x) = a \text{ et } h(B(x, r)) = B(a, tr) \subset A$$

car A est convexe et en particulier $a \in A$ et par suite la convexité de A^0 .

Exercice :3

Soit E un evn, A et B deux parties de E , on suppose que A est ouvert dense dans E et B est dense dans E . Montrer que $A \cap B$ est dense dans E .

Solution 3 Soient $x \in E$ et U un ouvert de E contenant x , comme A est dense dans E , alors $U \cap A \neq \emptyset$ et comme B est dense dans E et $U \cap A$ est un ouvert non vide de E donc $(U \cap A) \cap B = U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ ce qui prouve que $A \cap B$ est dense dans E .

Exercice :4

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E tel que $F \neq E$.

- Montrer que $\bar{F}$ est un sev de E .
- Montrer qu'un hyperplan est soit fermé ou dense dans E .
- En déduire que si $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$, alors $A = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$ est soit fermé soit dense dans E .
- Montrer $F^0 = \phi$.
- En déduire que si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de E alors $\text{Vect}(\mathcal{O}) = E$.
- En déduire que $M_n(\mathbb{K})$ admet une base formée des matrices inversibles.
- Que peut-on dire d'un sous espace vectoriel ouvert de E ?

Solution 4 1. Il est clair que $\bar{F} \neq \phi$.

Soit $(x, y) \in \bar{F}^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. D'après la caractérisation séquentielle d'un point adhérent on a

$$\exists ((x_n)_n, (y_n)_n) \in (F^N)^2, x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow y$$

Comme F est un sous espace vectoriel de E , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha x_n + y_n \in F$ et la suite $(\alpha x_n + y_n)$ converge de limite $\alpha x + y$, alors $\alpha x + y \in \bar{F}$.

- Soit H un hyperplan de E , alors on a $H \subset \bar{H} \subset E$. Supposons que H est inclus strictement dans $\bar{H}$, il existe alors $a \in \bar{H}$ et $a \notin H$ et par définition de H on a $H \oplus \mathbb{K}a = E$ et comme H et $\mathbb{K}a$ sont inclus dans $\bar{H}$, alors $E \subset \bar{H}$ et par suite $\bar{H} = E$, ce qui prouve alors que H est dense dans E .
- Il est clair que l'application $\phi : f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire non nulle de $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, et par suite A est un hyperplan de E donc il est soit fermé ou dense dans E .
- Supposons que $F^0 \neq \phi$ et soit $a \in F^0$, alors par définition on a :

$$\exists r > 0, B(a, r) \subset F$$

Soit x un vecteur non nul de E l'élément $y = \frac{r}{2\|x\|}x + a \in B(a, r)$ donc c'est un élément de F et comme F est un sous espace vectoriel de E , alors $\frac{\|x\|}{2r}(y - a) = x \in F$ et comme $0_E \in F$, alors $E \subset F$ et par suite $E = F$ ce qui est absurde, donc $F^0 = \phi$.

- Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E . On a $\mathcal{O} \subset \text{Vect}(\mathcal{O})$, donc $\mathcal{O} = \mathcal{O}^0$ est inclus dans l'intérieur de $\text{Vect}(\mathcal{O})$ et par suite $\text{Vect}(\mathcal{O})$ est un sous espace de E d'intérieur non vide donc d'après la question précédente on a $\text{Vect}(\mathcal{O}) = E$.
- En appliquant le résultat de la question précédente pour $E = M_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{O} = GL_n(\mathbb{K})$, alors on a $\text{Vect}(GL_n(\mathbb{K})) = M_n(\mathbb{K})$ ce qui entraîne que $GL_n(\mathbb{K})$ est une famille génératrice de $M_n(\mathbb{K})$ et par suite on peut extraire de $GL_n(\mathbb{K})$ une base de $M_n(\mathbb{K})$.
- Si F est un sous espace vectoriel de E , alors $\text{Vect}(F) = F$ et comme F est un ouvert alors d'après la question précédente on a $F = \text{Vect}(F) = E$.

Exercice :5

On note par E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que

$$C = \{f \in E, f > 0\}$$

Est un ouvert de E

Solution 5 Soit f un élément de C , comme f est continue sur le segment $[0,1]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes en particulier il existe $c \in [0,1]$, $f(c) = \min_{t \in [0,1]} f(t)$. Posons $r = \frac{m}{2} > 0$ et g un élément de E tel que $\|f - g\|_\infty < \frac{m}{2}$, c'est à dire :

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - g(x)| < \frac{m}{2}$$

ce qui entraîne que : $\forall x \in [0,1], 0 < f(x) - \frac{m}{2} \leq g(x)$ ce qui prouve alors que $B(f, \frac{m}{2}) \subset C$, et par suite C est un ouvert de E

Exercice :6

On note par E l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infini N_∞ .

1. Montrer que l'ensemble $F = \{f \in E, f \geq 0\}$ n'est pas une partie fermée de E
2. Montrer que l'ensemble $A = \{f \in E, \forall x \in [0,1], e^{f(x)} \geq 2 + f(x)\}$ est une partie fermée, non bornée de E

Solution 6 1. Considérons l'application $f: x \mapsto e^{-x^2}$, on a $f \in F$. Soit $r > 0$ et $g: x \mapsto f(x) - \frac{r}{2}$ comme l'application g tend vers $-\frac{r}{2}$ en $+\infty$, alors au voisinage de $+\infty$ l'application g est strictement négative et comme $N_\infty(f - g) = \frac{r}{2}$, alors $g \in B(f, r)$. Ceci qui entraîne alors que $B(f, r)$ n'est pas inclus dans F ce qui prouve que F n'est pas un fermé de E

2. Nous allons montrer que A est une partie fermée de E en utilisant la caractérisation séquentielle des parties fermées. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers une application $f \in E$, montrons que $f \in A$. Soit $x \in [0,1]$, on a

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq N_\infty(f_n - f) \rightarrow 0$$

Ce qui prouve alors que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, ceci d'une part, d'autre part on a $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, e^{f_n(x)} \geq 2 + f_n(x)$, donc par passage à la limite et par continuité de l'application exponentielle, on a $e^{f(x)} \geq 2 + f(x)$, ce qui entraîne alors que $f \in A$ et par suite A est une partie fermée de E

Remarque : la convergence de la suite $(f_n)_n$ dans E vers l'application f veut dire que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc converge simplement vers f sur $[0,1]$, donc le raisonnement fait avant suppose que la notion des suites des fonctions n'est pas encore été abordée. Montrons maintenant que A n'est pas bornée. Soit $t \in [2, +\infty[$,

considérons l'application $f_t: \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto t \end{cases}$, en étudiant les

variations de l'application $t \mapsto e^t - (2+t)$ sur $[2, +\infty[$, on a $\forall t \in [2, +\infty[, e^t \geq 2 + t$ ce qui entraîne que l'application f_t est un élément de A et comme $\forall t \in [2, +\infty[, \|f_t\| = |t| = t$, alors la partie A n'est pas bornée

Exercice :7

Soit U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E .

1. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E
2. En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide

Solution 7 1. Soit $x \in E$ et O un ouvert de E contenant x . Puisque $\bar{U} = E$, alors $O \cap U \neq \emptyset$. Soit alors y un élément dans $O \cap U$, comme $O \cap U$ est un ouvert de E , contenant y et $\bar{V} = E$, alors $(O \cap U) \cap V \neq \emptyset$, c'est à dire $O \cap (U \cap V) \neq \emptyset$ et ceci étant vrai pour tout ouvert de E contenant x ce qui entraîne alors que $x \in \overline{U \cap V}$ et par suite $U \cap V$ est dense dans E

2. Rappelons que si A est une partie de E , alors $C_E^{A^0} = \overline{C_E^A}$. Soient F et G deux parties de E d'intérieur vide, donc par passage au complémentaire on a $C_E^{F^0} = C_E^{G^0} = E$ ce qui entraîne alors que $C_E^F \cap C_E^G = E$ c'est à dire que $\overline{C_E^{F \cup G}} = E$ ce qui est équivalent à $(F \cup G)^0 = \emptyset$

Exercice :8

1. Montrer que si A et B sont deux compacts, il en est de même de $A + B$.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé, $A + B$ est fermé
3. Si on a simplement supposé que A et B sont deux fermés de E , la partie $A + B$ est-elle fermée de E

Solution 8 1. On a A et B sont compacts de E donc $A \times B$ est compact, et comme l'application $(+ : (x, y) \mapsto x + y)$ est continue, alors l'image du compact $A \times B$ est un compact c'est à dire que $A + B$ est compact de E

2. Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $A + B$ qui converge de limite $z \in E$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $z_n = a_n + b_n$, avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$, comme A est compact, alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $a_{\varphi(n)} \rightarrow a \in A$ et comme $b_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$, alors la suite $(b_{\varphi(n)})_n$ est convergente de limite $z - a$ et comme B est fermé, alors $z - a \in B$ c'est à dire qu'il existe $b \in B$ tel que $z - a = b$, donc $z = a + b \in A + B$ ce qui prouve alors que $A + B$ est fermée de E
3. Si A et B sont deux parties fermées de E , on a pas nécessairement $A + B$ est un fermé, en effet pour $E = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$, $A = a\mathbb{Z}$ et $B = b\mathbb{Z}$ avec $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, alors il est clair que A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}$ et $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$ (Voir TD sup.), donc elle n'est pas fermée de $\mathbb{R}$

Exercice :9. Théorème de fermés emboîtés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $(F_n)_n$ une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Solution 9 On a $\delta(F_n) \rightarrow 0$ donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \delta(F_n) \leq \varepsilon$. Choisissons pour chaque n entier naturel

x_n dans F_n . Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq n_0$, alors comme la suite $(F_n)_n$ est décroissante alors on a $(x_{n+p}, x_n) \in F_n^2$ ce qui entraîne que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \delta_n \leq \varepsilon$ ce qui prouve alors que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy de E qui est un espace de Banach, donc elle converge vers un élément x de E . Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ la suite $(x_p)_{p \geq n}$ converge de limite x car l'application $\varphi : p \mapsto n+p$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(x_p)_{p \geq n} = (x_{\varphi(p)})_p$. Comme la suite $(F_n)_n$ est décroissante, alors $\forall p \geq n$, $x_p \in F_n$ et comme F_n est un fermé de E , alors $x \in F_n$ et ceci pour tout entier n ce qui prouve que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
Soit $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $l \in F_n$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$, alors $\forall n \geq n_0$, $\|x - l\| \leq \delta_n \leq \varepsilon$ ce qui entraîne que $x = l$, on conclut alors que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Exercice :10

Si $(K_n)_n$ est une suite décroissante de parties compactes d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, alors l'intersection $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact de E .

Solution 10 Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K_n$, comme la suite $(K_n)_n$ est décroissante alors la suite $(x_n)_n$ est une suite du compact K_0 , il existe alors une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ est convergente de limite $c \in K_0$. Rappelons l'équivalence suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall a \in E, d(a, A) = 0 \Leftrightarrow a \in \bar{A}$$

Donc comme K_n est un fermé, alors $c \in K_n \Leftrightarrow d(c, K_n) = 0$. Or pour tout $n \geq p$, $\varphi(n) \geq p$, donc $d(c, K_p) \leq \|c - x_{\varphi(n)}\| \rightarrow 0$ ce qui entraîne alors que $d(c, K_p) = 0$ d'où $c \in K_p$ et par suite $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} K_p$ est non vide

et c'est un fermé de K_0 qui est un compact donc c'est un compact de E .

Exercice :14

Soient E un espace vectoriel, K une partie compacte de E , $(u_n)_n$ une suite dans K . Montrer que si $(u_n)_n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors $(u_n)_n$ converge.

Solution 11 La suite $(u_n)_n$ est une suite d'un compact donc il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers $a \in K$. Supposons que $(u_n)_n$ ne converge pas vers a , donc :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 \text{ et } \|u_n - a\| \geq \varepsilon$$

On peut alors construire par récurrence une extractrice ψ de $\mathbb{N}$ telle que

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, \|u_{\psi(n)} - a\| \geq \varepsilon$$

La suite $(u_{\psi(n)})_n$ est une suite d'un compact donc il admet une valeur d'adhérence et par suite il existe une extractrice η de $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\psi \circ \eta(n)})_n$ converge et comme cette suite est aussi extraite de la suite $(u_n)_n$, alors elle admet a comme limite (car a c'est la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_n$). Or d'après $(*)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\psi \circ \eta(n)} - a\| \geq \varepsilon$ et par passage à la limite on a $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde. On conclut alors que $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice :12

Soient K et L deux parties compactes disjointes d'un espace vectoriel normé. Montrer que $d(K, L) > 0$.

Solution 12 L'application $f : \begin{cases} K \times L \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y) \end{cases}$ est lipschitzienne, donc continue et comme $K \times L$ est compact, alors f est bornée et atteint sa borne inférieure c'est à dire il existe $(a, b) \in K \times L$, $d(K, L) = d(a, b)$ et comme $K \cap L = \emptyset$, alors $a \neq b$ et par suite $d(a, b) > 0$ c'est à dire $d(K, L) > 0$.

Exercice :13

L'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ étant normé par $\| \cdot \|_{\infty} : f \mapsto \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Solution 13 Pour démontrer que $S(0, 1)$ n'est pas compact il suffit d'exhiber une suite de la sphère unité telle que aucune suite extraite ne peut être convergente. Considérons la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par $f_n : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{2in\pi t} \end{cases}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in S(0, 1)$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p \neq q$ on a :

$$(*) : \forall t \in [0, 1], |f_p(t) - f_q(t)| = 2 |\sin((q-p)\pi t)| \leq 2$$

et on a égalité si $t = \frac{1}{2|q-p|} \in [0, 1]$ ce qui entraîne que $\|f_p - f_q\|_{\infty} = 2$ et par suite aucune sous suite de $(f_n)_n$ ne peut être convergente. Dans $(*)$ on a utilisé l'égalité $|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \right|$.

Exercice :14

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et injective, on se propose de montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$ est connexe par arcs.

2. Soit F l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = f(x) - f(y)$$

a. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que $0 \notin F(C)$.

c. En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Solution 14 1. Il est facile à vérifier que l'ensemble C est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, donc C est une partie connexe par arcs.

2. L'application $(x, y) \mapsto f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composé de l'application continue $(x, y) \mapsto x$ et de même l'application $(x, y) \mapsto f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. et par suite F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Si $0 \in F(C)$, alors il existe $(x, y) \in C$, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, alors $x = y$ ce qui contredit le fait que $x < y$. Donc $0 \notin F(C)$.

4. F est continue et C est connexe par arcs, donc $F(C)$ est connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contient pas 0,

donc $F(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $F(C) \subset \mathbb{R}_-^*$ ce qui veut dire f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice :15

1. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs
2. En déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes
3. Montrer que $[0,1]$ et $\mathcal{U}$ ne sont homéomorphes

Solution 15 1. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. Si $\forall t \in [0,1], tz + (1-t)z' \neq 0$, alors l'application $\gamma : \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto tz + (1-t)z' \end{cases}$ est un chemin continue joignant z et z' et de support contenu dans $\mathbb{C}^*$.
Si $\exists t_0 \in]0,1[$, $0 = t_0 z + (1-t_0)z'$, alors il existe z'' dans $\mathbb{C}^*$ tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], tz + (1-t)z'' \neq 0 \\ \forall t \in [0,1], tz'' + (1-t)z' \neq 0 \end{cases}$$

Il suffit de prendre z'' un élément de la sphère $S\left(\frac{z+z'}{2}, \frac{|z-z'|}{2}\right)$. Les points z et z'' sont connectés dans $\mathbb{C}^*$ et z'' est connecté avec z' dans $\mathbb{C}^*$, donc z et z' peuvent être reliés par un chemin contenu dont le support est inclus dans $\mathbb{C}^*$, la connexité de $\mathbb{C}^*$ est prouvée

Autrement Soit $z = ae^{ia}$ et $z' = be^{ib}$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ avec $a > 0$ et $b > 0$, l'application

$$f : \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^* \\ t \mapsto [(1-t)a + tb] e^{(1-t)ia + itb} \end{cases}$$

Est une application continue sur $[0,1]$ vérifiant

$$f(0) = z, f(1) = z' \text{ et } \forall t \in [0,1], |f(t)| \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$$

Ce qui entraîne que le support du chemin f est contenu dans $\mathbb{C}^*$ ce qui prouve la connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$.

Remarque $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé

2. Supposons qu'il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, alors comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arc alors son image par f est aussi connexe par arcs à savoir $\mathbb{R}/\{f(0)\}$ ce qui est absurde. Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes

3. L'application $\varphi : \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathcal{U} \\ t \mapsto e^{2i\pi t} \end{cases}$ est continue, surjective donc $\mathcal{U}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$. Il est clair que $\varphi([0,1]) = \mathcal{U}/\{1\}$ est également connexe par arcs de $\mathbb{C}$. Supposons que $[0,1]$ et $\mathcal{U}$ sont homéomorphes et soit g un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $[0,1]$. Posons $a = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $h : \mathcal{U} \rightarrow [0,1]$ définie par $\forall z \in \mathcal{U}, h(z) = g(az)$ et comme $z \mapsto az$ est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, alors h est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $[0,1]$ et par suite $h(\mathcal{U}/\{1\})$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, ce qui est absurde car $h(\mathcal{U}/\{1\}) = \left[0, \frac{1}{2} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right]$. On conclut alors que $[0,1]$ et $\mathcal{U}$ ne sont pas homéomorphes

Exercice :16

1. Soit E un evn de dimension finie supérieur ou égale à 2 et S la sphère unité
 - a. Montrer que $E/\{0\}$ est connexe par arcs
 - b. Dédurre que la sphère unité $S(0,1)$ est connexe par arc.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs

Solution 16 1. a. On procède de la même manière que l'exercice (17)

b. L'application $f : \begin{cases} E/\{0\} \rightarrow E \\ x \mapsto \frac{1}{\|x\|}x \end{cases}$ est une application continue car l'application $\|\cdot\|$ est continue ne s'annulant pas sur $E/\{0\}$ et par suite $f(E/\{0\}) = S(0,1)$ est connexe par arcs

2. Si $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors son image par $\det$ est connexe par arcs (car $\det$ est continue), c'est à dire que $\mathbb{R}^*$ est connexe par arcs ce qu'est absurde

Exercice :17

Soit A une partie connexe par arcs.

1. Montrer que A n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints de E
2. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées relatives à A est $\emptyset$ et A

Solution 17 1. Supposons qu'il existe deux ouverts θ_1 et θ_2 non vides relatifs à A et disjoints tels que $A = \theta_1 \cup \theta_2$.

Considérons l'application :

$$f : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \theta_1 \\ 0 & \text{si } x \in \theta_2 \end{cases} \end{cases}$$

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$, montrons que $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à A

Si $0 \notin V$ et $1 \notin V$, alors $f^{-1}(V) = \emptyset$ ce qui entraîne que $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à A

Si $0 \in V$ et $1 \notin V$, alors $f^{-1}(V) = \theta_2$ qu'est un ouvert relatif à A

Si $0 \notin V$ et $1 \in V$, alors $f^{-1}(V) = \theta_1$ qu'est un ouvert relatif à A

Si $0 \in V$ et $1 \in V$, alors $f^{-1}(V) = A$ qu'est un ouvert relatif à A . On conclut alors que $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à A et par suite f est continue sur A

Comme A est connexe par arcs et f est continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et 1, donc il contient aussi le segment $[0,1]$ ce qu'est impossible, donc A ne peut pas être réunion d'ouverts non vides relatifs à A et disjoints

On montre de même que A ne peut pas être réunion de fermés non vides relatifs à A et disjoints

2. Soit B une partie ouverte et fermée relatifs à A telle que $A \neq \emptyset$ et $B \neq A$. Alors $A = B \cup C_A^B$, donc A est réunion de

deux ouverts relatifs à A non vides disjoints ce qui est absurde, donc $B = A$ ou $B = \emptyset$

Exercice :18

Soit A une partie connexe par arcs de E et f une application de A à valeurs dans un espace vectoriel normé $(F, ||.||_F)$ telle que f est localement constante, c'est à dire

$$\forall a \in A, \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in V \cap A, f(x) = f(a)$$

Montrer que f est constante

Solution 18 Comme f est localement constante, alors f est continue sur A .

Soient a un élément de A et $X = \{x \in A, f(x) = f(a)\}$. Il s'agit de montrer que $X = A$, comme A est connexe par arcs, alors il suffit de montrer que X est un ouvert et fermé relatif à A .

Soit $x \in X$, comme f est localement constante, alors il existe $r > 0$, tel que $\forall y \in A \cap B(x, r)$, $f(x) = f(y)$, et comme $f(x) = f(a)$, alors $A \cap B(x, r) \subset X$ ce qui veut dire que X est un ouvert relatif à A

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X qui converge de limite x .

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(a)$ et par continuité de f , et par passage à la limite on a $f(x) = f(a)$ ce qui entraîne que $x \in X$ et par suite X est un fermé relatif à A . Comme A est connexe par arcs de E et X est non vide car il contient a , alors $X = A$

Exercice :19

1. On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonale est noté $O_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$

2. On dit qu'une matrice M à coefficients complexes est unitaire si

$${}^tMM = I_n$$

L'ensemble des matrices unitaires est noté $U_n(\mathbb{C})$. Montrer que $U_n(\mathbb{C})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{C})$

Solution 19 Comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, alors les normes sont équivalentes, on peut alors à chaque fois choisir une norme convenable.

1. Pour montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compacte il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$. Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors on a

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tMM = I_n \Leftrightarrow M \in f^{-1}(\{I_n\})$$

Avec $f: M \mapsto {}^tMM$. L'application $g: M \mapsto ({}^tM, M)$ est continue car ses composantes sont linéaires en dimension finie.

L'application $h: (A, B) \mapsto AB$ est continue car c'est une application bilinéaire en dimension finie, donc $f = \text{hog}$ est continue et par suite $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$

On muni $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $||.||: M \mapsto \sqrt{\text{tr}({}^tMM)}$. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $||M|| = \sqrt{n} \leq n$, ce qui montre alors que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné donc compact de $M_n(\mathbb{R})$

2. Même raisonnement

20

1. Montrer qu'un polynôme P unitaire à coefficients dans $\mathbb{R}$ est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^{\deg(P)}$$

2. Montrer que l'ensemble des matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A ne peut pas être limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$

Solution 20 1. ($\Rightarrow$) Soit P un polynôme unitaire scindé dans $\mathbb{R}$, alors on a $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^r |z - \lambda_k|^{\alpha_k} \geq \prod_{k=1}^r |\text{Im}(z - \lambda_k)|^{\alpha_k}$$

Comme $\lambda_k \in \mathbb{R}$ alors $|\text{Im}(z) - \lambda_k| = |\text{Im}(z)|$ et par suite

$$|P(z)| \geq \prod_{k=1}^r |\text{Im}(z)|^{\alpha_k} = |\text{Im}(z)|^{\sum_{k=1}^r \alpha_k} = |\text{Im}(z)|^{\deg P}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^{\deg P}$. Soit α une racine complexe de P (son existence est assurée par D'Alembert), on a :

$$0 = |P(\alpha)| \geq |\text{Im}(\alpha)|^{\deg P}$$

Ce qui entraîne alors que $\text{Im}(\alpha) = 0$ et par suite $\alpha \in \mathbb{R}$ ce qui entraîne que P est scindé sur $\mathbb{R}$

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, alors il existe une matrice triangulaire supérieure $T = (t_{ij})_{i,j}$ et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$. Posons pour $p \in \mathbb{N}^*$, $T_p = (m_{ij})_{i,j}$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} = \begin{cases} t_{ii} + \frac{i}{p}, & \text{si } i = j \\ t_{ij}, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il est clair que si pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $t_{ii} = t_{jj}$, alors $t_{ii} + \frac{i}{p} \neq t_{jj} + \frac{j}{p}$.

Soit maintenant $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $t_{ii} \neq t_{jj}$

alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq p_0$, $t_{ii} + \frac{i}{p} \neq t_{jj} + \frac{j}{p}$, en effet il suffit de choisir p_0 tel que $\forall p \geq p_0$, $p \notin \left\{ \frac{1-k}{t_{kk}-t_{ll}}, t_{ll} \neq t_{kk} \right\}$ ce qui entraîne la suite $(T_p)_{p \geq p_0}$ est une suite de matrices diagonalisables dont la limite est T et comme l'application $M \mapsto P.M.P^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie, alors $(PT_pP^{-1})_{p \geq p_0}$ est une suite de matrices diagonalisables qui converge vers A d'où le résultat

3. On suppose qu'il existe une suite de matrices $(A_p)_p$ diagonalisables d'ordre 2 qui converge vers A . On a $\forall p \in \mathbb{N}$, χ_{A_p} est scindé sur $\mathbb{R}$, donc

(*) : $\forall z \in \mathbb{C}, |\chi_{A_p}(z)| \geq |\text{Im}(z)|^2$ et comme l'application $M \mapsto \chi_M$ est continue, alors par passage à la limite dans (*), on a $\forall z \in \mathbb{C}, |\chi_A(z)| \geq |\text{Im}(z)|^2$ c'est à dire que χ_A est scindé ce qui est absurde car $\chi_A = X^2 + 1$, donc A ne peut pas être limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$

Remarque. On peut, en s'inspirant de la deuxième question, démontrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables

dans $M_n(\mathbb{R})$ 

21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$ des nombres complexes distincts

1. Montrer que $\mathbb{C}/\{a_1, \dots, a_n\}$ est connexe par arcs
2. Soient A, B deux matrices inversibles et $z \in \mathbb{C}$, on pose $M(z) = (1-z)A + zB$ et $P(z) = \det M(z)$
 - a. Vérifier que P a un nombre fini de racines, notons les $z_1, \dots, z_p$
 - b. Montrer qu'il existe un arc de $\mathbb{C}/\{z_1, \dots, z_p\}$ joignant 0 et 1
3. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Solution 21 1. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}/\{a_1, \dots, a_n\})^2$. Si le segment d'extrémités z et z' ne contient aucun des a_i , alors le chemin $\gamma : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}/\{a_1, \dots, a_n\} \\ t \mapsto tz + (1-t)z' \end{cases}$ est un chemin joignant z et z' et de support contenu dans $\mathbb{C}/\{a_1, \dots, a_n\}$.
Si le segment d'extrémités z et z' contient au moins un élément de $\{a_1, \dots, a_n\}$, alors comme ce dernier ensemble est fini alors il existe un complexe z'' tel que les segments d'extrémités z et z'' et le segment d'extrémités z' et z'' ne contiennent aucun élément de $\{a_1, \dots, a_n\}$ donc d'après le premier cas on peut lier z et z'' (respectivement z' et z'') par un chemin continu inclus dans $\mathbb{C}/\{a_1, \dots, a_n\}$ ce qui entraîne alors que z et z' sont connectés dans $\mathbb{C}/\{a_1, \dots, a_n\}$, d'où le résultat

2. On pose $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, soit $z \in \mathbb{C}$, alors on a $M(z) = ((1-z)a_{ij} + zb_{ij})_{ij}$ et par suite

$$P(z) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n ((1-z)a_{i\sigma(k)} + zb_{i\sigma(k)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n (a_{i\sigma(k)} - z(a_{i\sigma(k)} - b_{i\sigma(k)}))$$

Ce qui entraîne que $P(z)$ est une fonction polynômiale en z de degré inférieure ou égale à n et comme $P(0) = \det(A) \neq 0$, alors P est un polynôme non nul donc admet un nombre fini de racines

3. Comme $P(0) = \det(A) \neq 0$ et $P(1) = \det(B) \neq 0$ donc les réels 0 et 1 ne sont pas des racines de P donc $(0, 1) \in (\mathbb{C}/\{z_1, \dots, z_n\})^2$ donc on peut relier 0 et 1 par un chemin ρ continue contenu dans $\mathbb{C}/\{z_1, \dots, z_n\}$

4. L'application

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ t \mapsto (1-\rho(t))A + \rho(t)B \end{cases}$$

est un chemin continu contenu dans $GL_n(\mathbb{C})$ ce qui prouve que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs



Exercice :22. Diagonalisation des éléments d'un sous groupe de $GL_n(\mathbb{K})$

Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si G est fini alors tous ses éléments sont diagonalisables (Utiliser le théorème de Lagrange vue dans la Fiche 3)
2. Dans cette question on suppose que G est borné.
 - 2.1 Montrer que : $\forall A \in G, \forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| = 1$
 - 2.2 Montrer que tout élément de G est diagonalisable
3. Dans cette question on suppose que $\{tr(A), A \in G\}$ est fini et que $M_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(G)$. Montrer que tout éléments de G est diagonalisable.

Indication Montrer que l'application

$$N : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \mapsto \sup_{X \in G} (|tr(AX)|) \end{cases}$$

est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ et appliquer 2

Solution 22 $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc ses normes sont équivalentes, on muni alors $M_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée associée à la norme infinie de $\mathbb{C}^n$

1. Posons $r = \text{card } G$, alors d'après le théorème de Lagrange vue en TD d'arithmétique des entiers et des polynômes, alors on a $\forall A \in G, A^r = I_n$, ce qui entraîne alors que le polynôme $X^r - 1$ est un polynôme annulateur de tout élément de G et comme il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, alors tout élément de G est diagonalisable
2. On suppose que G est bornée, alors

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^*, \forall M \in G, ||M|| \leq \gamma$$

Soit A un élément de G et $\lambda \in Sp(A)$ et soit

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{C}), ||X||_{\infty} = 1, AX = \lambda.X$$

Par une récurrence facile (C'est à faire) on a

 $\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = \lambda^p.X$ ce qui entraîne que

$$|\lambda|^p \cdot ||X||_{\infty} = |A^p| = ||A^p.X||_{\infty} \leq ||A^p|| \cdot ||X||_{\infty} = ||A^p|| \leq \gamma$$

Ce qui prouve alors que la suite $(\lambda^p)_p$ est bornée et ceci n'a lieu que si $|\lambda| \leq 1$.

On a déjà fait dans le cours de la réduction que la valeur propre λ est non nulle et que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de la matrice A^{-1} , donc en reprenant le raisonnement précédent en remplaçant A par A^{-1} , on aura $|\frac{1}{\lambda}| \leq 1$ ce qui entraîne alors que $|\lambda| = 1$

3. Soit A un élément de G . Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, canoniquement associé à A . Pour montrer que u est diagonalisable il suffit de montrer que $\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n}) = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n})^2$ (Voir l'exercice (9) de la fiche des grands classique de la réduction). On sait que

$$\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n}) \subset \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n})^2$$

Supposons qu'on a pas l'autre inclusion, alors :

$$\exists x \in \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n})^2, x \notin \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^n})$$

Le vecteur $y = u(x) - \lambda.x$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ . On a $u(x) = y + \lambda.y$, par une récurrence

facile (mais à faire) ,on montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u^p(x) = p\lambda^{p-1} \cdot y + \lambda^p \cdot x$$

Ce qui entraîne alors que $p\lambda^{p-1} \cdot y = u^p(x) - \lambda^p \cdot x$ et par suite on a $\|p\lambda^{p-1} \cdot y\| = \|u^p(x) - \lambda^p \cdot x\|$, c'est à dire que $p\|y\| \leq \|u^p(x)\| + \|\lambda^p \cdot x\|$, d'où $p\|y\| \leq (\|u^p\| + 1)\|x\|$ et comme y est non nul, alors on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \leq (1 + \|u^p\|) \frac{\|x\|}{\|y\|}$$

ce qui est absurde car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, on conclut alors que

$\ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)^2 = \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$ ce qui veut dire que la valeur propre λ est une racine simple du polynôme minimal de u (Voir l'exercice (9) fiche des grands classique de la réduction), ce qui prouve alors la diagonalisabilité de u

Exercice :23

Application contractante

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, f une application de E dans E , a un élément de E et $(x_n)_n$ la suite d'éléments de E définie par

$$x_0 = a \text{ et } x_{n+1} = f(x_n)$$

- On suppose dans cette question que f est contractante.
 - Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente
 - En déduire que f admet un unique point fixe
- Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_p$ est contractante. Montrer que f admet un point fixe

Solution 23 1. On suppose que f est contractante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$$

Par une récurrence facile on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

On a alors pour tout entier naturel p :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^p \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \right) \|x_1 - x_0\| \leq \frac{k^p}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

Ce dernier terme tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ car $0 \leq k < 1$ et par suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0, \left| \frac{k^p}{1-k} \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui entraîne alors que

$$\forall p \geq p_0, \|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$$

Ce qui veut dire que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et comme E est un espace de Banach, alors la suite $(x_n)_n$ est convergente de limite $x \in E$.

Comme l'application f est lipschitzienne, alors elle est continue et par suite d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a $f(x) = x$ d'où l'existence d'un point fixe pour f

Supposons l'existence de deux points fixes, x et y de f , alors $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$, c'est à dire $\|x - y\| \leq k\|x - y\|$ et comme $k < 1$, alors $x = y$

- Soit p un entier naturel non nul tel que f^p est contractante de rapport $k \in [0, 1[$. D'après la question 1, toute application contractante admet un unique point fixe donc il existe un

unique $x \in E$ tel que $f^p(x) = x$. On a

$$\|f^p(f(x)) - f^p(x)\| \leq k\|f(x) - x\|$$

C'est à dire que

$$\|f(f^p(x)) - f^p(x)\| = \|f(x) - x\| \leq k\|f(x) - x\|$$

Comme $k < 1$, alors $f(x) = x$. D'où le résultat.

On peut aussi remarquer que $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x)$ ce qui entraîne alors que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p par unicité on a alors $f(x) = x$ ce qu'il fallait démontrer

Exercice :24

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte et convexe de E et f une application 1-lipschitzienne de K dans K

- Soient a un élément de K et n un entier naturel non nul. Soit f_n l'application de K dans K définie par
$$\forall x \in K, f_n(x) = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x)$$
 Montrer que l'application f_n admet un unique point fixe a_n
- En déduire que f admet un point fixe

Solution 24 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in K$

Soit $x \in K$. Puisque K est convexe et $f(K) \subset K$, alors le vecteur :

$$f_n(x) = \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x)$$

est un élément de K ce qui entraîne alors que $f_n(K) \subset K$

Pour tout $(x, y) \in K^2$, on a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

Ce qui montre alors que l'application f_n est contractante sur K donc d'après l'exercice (23), elle admet un point fixe x_n dans K , on a

$$(*) : x_n = \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x_n)$$

- Comme K est compact, alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers un élément x de K . D'après la relation $(*)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{\varphi(n)} = \frac{a}{\varphi(n)} + \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right)f(x_{\varphi(n)})$$

Et comme f est continue, alors par passage à la limite on a $f(x) = x$, d'où l'existence d'un point fixe de f

Exercice :25

Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et f une application de K dans K telle que :

$$(*) : \forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

- Montrer que f admet un unique point fixe noté a
- Soit a un point quelconque de K et $(x_n)_n$ une suite de K définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

On se propose de montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente de limite a . Pour cela, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \|x_n - a\|$. Le résultat est clair si $(u_n)_n$ est stationnaire



, on suppose dans la suite que la suite (u_n) n'est pas stationnaire

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente de limite 1
2. En utilisant la compacité de K , montrer que $l = 0$
3. Conclure

Solution 25 1. **Unicité** Supposons que f admet de deux points fixes x et y tels que $x \neq y$, alors par application de $(*)$, on a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \text{ ce qui est absurde d'où l'unicité}$$

Existence : L'application $g : \begin{cases} K \rightarrow K \\ x \mapsto \|x - f(x)\| \end{cases}$ est continue dans le compact K , donc elle est bornée et atteint ses bornes en particulier elle atteint sa borne inférieure en un point α .

Supposons que $f(\alpha) \neq \alpha$, alors par application de $(*)$, on a $\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\|$ c'est à dire que $g(f(\alpha)) < g(\alpha)$ et ceci contredit la définition de α et par suite $f(\alpha) = \alpha$, d'où le résultat

2. Soit $a \in K$ et $u_n = \|x_n - \alpha\|$.

Supposons que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n_0} = \alpha$, donc par une récurrence facile on a $\forall n \geq n_0$, $x_n = \alpha$ ce qui entraîne que $(u_n)_n$ est stationnaire ce qui est absurde, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\| < \|x_n - \alpha\| = u_n$ et par suite la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante et comme elle est minorée par 0, alors elle converge

3. Comme K est compact, alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge de limite γ , si on suppose que $\gamma \neq \alpha$, alors d'après $(*)$, on a $\|f(\gamma) - f(\alpha)\| = \|f(\gamma) - \alpha\| < \|\gamma - \alpha\|$. Or

$$u_{\varphi(n)+1} = \|x_{\varphi(n)+1} - \alpha\| = \|f(x_{\varphi(n)}) - \alpha\|$$

L'application $n \mapsto \varphi(n) + 1$ est une extractrice de $\mathbb{N}$, donc par passage à la limite et par continuité de f on a :

$$l = \|f(\gamma) - \alpha\| < \|\gamma - \alpha\| = l \text{ ce qui est absurde donc } \gamma = \alpha \text{ et par suite } l = 0$$

4. On conclut alors que $(x_n)_n$ converge de limite α



Exercice :26

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $(A^p)_p$ converge. Montrer que sa limite est nulle

Solution 26 Les sous espaces vectoriels $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont de sous espaces de dimension finie, donc il sont fermés de $M_n(\mathbb{R})$. Si on note par B la limite de la suite $(A^p)_p$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a ${}^t(A^{2p}) = ({}^tA)^2 = (-A)^{2p} = A^{2p}$ ce qui entraîne que la matrice A^{2p} est une matrice symétrique donc sa limite qu'est égale à B , car elle est extraite de $(A^p)_p$, est une matrice symétrique de même B est aussi la limite de la suite $(A^{2p+1})_p$ qu'est une suite d'éléments de $A_n(\mathbb{R})$, donc B est une matrice antisymétrique car $A_n(\mathbb{R})$ est fermé. On a alors $B \in A_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ ce qui entraîne alors que $B = 0_n$



Exercice :27

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Déterminer les réels a tels que la suite $(a^p A^p)_p$ converge vers une limite non nulle

Solution 27 Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = -X(X-1)(X-3)$, il est donc scindé à racines simples, la matrice A est alors diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible

P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ce qui entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n A^n = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

La suite $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^n \end{pmatrix} \right)_n$ converge vers une matrice non nulle

si et seulement si, la suite $(a^n)_n$ converge vers un réel non nul ou la suite $((3a)^n)_n$ converge vers un réel non nul, donc la seule possibilité est $a = \frac{1}{3}$. L'application $M \mapsto P.M.P^{-1}$ est continue car

linéaire en dimension finie, donc la suite $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \right)_n$

converge de limite non nulle si $a = \frac{1}{3}$



Exercice :28

Soit A une matrice d'ordre n à coefficients réels. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(M^k)_k$ converge

Solution 28 1. Condition nécessaire. Si une telle matrice M existe, alors d'après la caractérisation séquentielle de la continuité de l'application $N \mapsto N^2$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^{2k} = A^2$ et comme la suite $(M^{2k})_k$ est extraite de la suite $(M^k)_k$, alors elle va converger vers la matrice A , donc par unicité de la limite on a $A^2 = A$.

2. Condition suffisante. Si $A^2 = A$, alors en posant $M = A$, on a bien $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = A$. On conclut alors que La condition nécessaire et suffisante cherchée est que A soit une matrice de projection.



Exercice :29

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle et soient A et B deux parties connexes par arcs de E

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs
2. Montrer que $A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$ est connexe par arcs

Solution 29 1. Soit $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (A \times B)^2$, comme A (resp B) est connexe par arcs, alors il existe un chemin γ_1 (resp γ_2) continu sur $[0, 1]$ à valeurs dans A (resp B) tel que

$\gamma_1(0) = a_1$ et $\gamma_1(1) = a_2$ (resp. $\gamma_2(0) = b_1$ et $\gamma_2(1) = b_2$) L'application ρ définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \rho(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Est continue car ses composantes le sont. Et

$$\rho([0,1]) \subset A \times B, \rho(0) = (a_1, b_1) \text{ et } \rho(1) = (a_2, b_2)$$

ce qui prouve alors que $A \times B$ est connexe par arcs

2. Soit $(x, y) \in (A+B)^2$ avec $x = a_1 + b_1$ et $y = a_2 + b_2$. Soit γ_1 (resp γ_2) un chemin continu tracé sur A (resp sur B) joignant a_1 et a_2 (resp b_1 et b_2), l'application ρ définie sur $[0,1]$ par $\forall t \in [0,1], \rho(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ est une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $A+B$ joignant x et y , ce qui montre la connexité de $A+B$

Exercice :30

Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé de dimension finie telles que $A \cap B$ et $A \cup B$ sont connexes par arcs. Montrer que A et B sont connexes par arcs.

Solution 30 Soit $(a, b) \in A^2$, on a $(a, b) \in (A \cup B)^2$, donc par hypothèse il existe un chemin continu γ joignant a à b et contenu dans $A \cup B$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Si $\gamma([0,1]) \subset A$, alors c'est terminé

Si non soit $B = \{t \in [0,1], \gamma(t) \in B\}$. Par hypothèse cet ensemble est non vide et borné donc admet une borne inférieure notée t_0 et une borne supérieure t_1 . D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de B qui converge vers t_0 , par continuité de γ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(x_n) = \gamma(t_0)$ et comme B est fermé de E , alors $\gamma(t_0) \in B$ ceci d'une part d'autre part $\forall t \in [0, t_0], \gamma(t) \in A$ donc par passage à la limite quand t tend vers t_0 et par continuité de γ et comme A est fermé alors on a $\gamma(t_0) \in A$, donc $\gamma(t_0) \in A \cap B$ de même on montre que $\gamma(t_1) \in A \cap B$. La partie $A \cap B$ est connexe par arc donc il existe un chemin σ de l'intervalle $[t_0, t_1]$ à valeurs dans $A \cap B$ tel que $\sigma(t_0) = \gamma(t_0)$ et $\sigma(t_1) = \gamma(t_1)$. Considérons l'application

$$\rho : \begin{cases} [0,1] \rightarrow E \\ t \mapsto \begin{cases} \sigma(t) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ \gamma(t) & \text{si non} \end{cases} \end{cases}$$

L'application ρ est continue à valeurs dans A joignant a et b , ce qui prouve alors que A est connexe par arcs de même pour B

Exercice :31

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- Montrer que si $n \geq 1$ et si H est un hyperplan de E alors E/H n'est pas connexe par arcs
- Montrer que si $n \geq 2$ et si F est un sous espace de E de dimension inférieure ou égale à $n-2$ alors E/F est connexe par arcs

Solution 31 1. H est un hyperplan de E donc il existe une forme linéaire non nulle de E telle que $H = \ker(\varphi)$.

Soient $(a, b) \in E^2$ tel que $\varphi(a) > 0$ et $\varphi(b) < 0$ et γ un chemin de $[0,1]$ dans E/H joignant a et b . L'application ρ :

$$\begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \varphi(\gamma(ta + (1-t)b)) \end{cases} \text{ est continue sur } [0,1] \text{ comme compo-}$$

sée d'applications continues et $\rho(0)\rho(1) < 0$, donc d'après C.V.J il existe $t_0 \in]0,1[$, $\rho(t_0) = 0$, c'est à dire $\gamma(t_0a + (1-t_0)b) \in H$ ce qui contredit le fait que γ est à support dans E/H . On conclut alors que E/H n'est pas connexe par arcs

2. Soit F un sous espace de E de dimension inférieure p ou égale à $n-2$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ deux éléments de E n'appartenant pas à F donc

$$\exists (i_0, j_0) \in \llbracket p+1, n \rrbracket^2, x_{i_0} \neq 0 \text{ et } y_{j_0} \neq 0$$

On suppose par exemple que $x_{i_0} > 0$, l'application

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] \rightarrow E \\ t \mapsto \sum_{i=1}^n (1-t)x_i e_i + t e_{i_0} \end{cases}$$

Est une application continue sur $[0,1]$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = e_{i_0}$

$$\text{Soit } t \in]0,1[\text{ on a } \gamma(t) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n (1-t)x_i e_i + \underbrace{((1-t)x_{i_0} + t)}_{\in \mathbb{R}^+} e_{i_0} \in E/F$$

Donc γ est à support dans E/F . De même si $y_{j_0} > 0$ on peut relier y au vecteur e_{j_0} et comme les vecteurs e_{i_0} et e_{j_0} sont dans l'espace $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) / \{0_E\}$ et comme sa dimension est supérieure ou égale à 2, alors $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) / \{0_E\}$ est connexe par arcs et par suite on peut relier e_{i_0} et e_{j_0} par un chemin continu contenu dans $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) / \{0_E\}$ donc dans E/F . On conclut alors que x et y sont reliés par un chemin continu et contenu dans E/F .

Si $x_{i_0} < 0$, on fait un raisonnement analogue en remplaçant e_{i_0} par $-e_{i_0}$

Exercice :32

Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et

$$A = \left\{ f \in E, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

- Montrer que A est une partie fermée de E
- Vérifier que $\forall f \in E, \|f\|_\infty > 1$
- Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A

Solution 32 1. Soit $\varphi : f \mapsto f(0)$ et $\psi : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt \geq 1$. Soient f et g deux éléments de E , on a :

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| = |f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$$

Ce qui veut dire que φ est lipschitzienne donc continue sur E . Ceci d'une part d'autre part on a

$$|\psi(f) - \psi(g)| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \|f - g\|_\infty$$

Donc ψ est lipschitzienne donc continue, on en déduit alors que $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E et $\psi^{-1}([1, +\infty[)$ est un fermé de E et par suite A est fermé de E

2. Supposons que $\exists f \in A$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ alors

$$1 \leq \int_0^1 f(t) dt = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \leq 1$$

3.

Exercice :33

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Montrer que la série de terme général A^n est convergente et calculer sa somme

Solution 33 La norme sur $M_2(\mathbb{R})$ est la norme subordonnée associée à la norme infinie sur $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a

$$\|AX\|_{\infty} = \max\left(\left|\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right|, \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right|\right) \leq \frac{5}{6} \max(|x|, |y|) = \frac{5}{6} \|X\|_{\infty} < 1$$

D'où $\|A\| < \frac{5}{6} < 1$ et par suite la série $\sum_n A^n$ converge de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_2 - A)^{-1} = \frac{2}{21} \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice :34

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Soit M une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un entier naturel k_0 tel que

$$\forall k \geq k_0, \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} M^j \in GL_n(\mathbb{K})$$

Solution 34 $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie non nulle, donc ses normes sont équivalentes, donc, on choisit alors une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ car $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ et $\mathbb{K}^*$ est un ouvert et $\det$ est continue. Puisque $e^M \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\exists r > 0$, $\mathcal{B}(e^M, r) \subset GL_n(\mathbb{K})$.

On $e^M = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} M^k$ ce qui entraîne alors que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} M^j \in \mathcal{B}(e^M, r)$$

Et par suite $\forall k \geq k_0, \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} M^j \in GL_n(\mathbb{K})$