

THÉORÈME DE BOLZANO WEIERSTRASS

Énoncé :

Soit (u_n) une suite **bornée** de réels. Alors, on peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

(Variante : toute suite bornée de réels admet une valeur d'adhérence)

Démonstration :

L'idée générale :

Notons a_0 (resp. b_0) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. (Existent car (u_n) bornée)

Posons $I_0 = [a_0, b_0]$ et c_0 le centre de I_0 .

L'un, au moins, des deux intervalles $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$ contient une **infinité de termes** de la suite (u_n) . (On a bien dit une infinité de termes ; ce n'est pas forcément une infinité de valeurs)

Notons I_1 cet intervalle et c_1 son centre. On réitère le procédé ci-dessus avec le segment I_1 .

On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0. L'intersection de tous ces segments est donc un certain réel ℓ . En outre, par construction, chacun de ces segments contient au moins un terme de la suite (u_n) . On peut donc construire une suite extraite en choisissant à chaque fois l'un de ces termes et cette suite converge nécessairement vers ℓ .

Mise en forme :

Soient $a_0 = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $b_0 = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$$

Pour tous réels α et β tels que $a_0 \leq \alpha < \beta \leq b_0$, notons :

$$N(\alpha, \beta) = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha \leq u_n \leq \beta\}$$

($N(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des **indices** n pour lesquels $\alpha \leq u_n \leq \beta$)

On sait que $N(a_0, b_0)$ est infini. Posons $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Comme $N(a_0, b_0) = N(a_0, c_0) \cup N(c_0, b_0)$, l'un, au moins, des deux ensembles $N(a_0, c_0)$ ou $N(c_0, b_0)$ est aussi infini.

Si $N(a_0, c_0)$ est infini alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

Si $N(c_0, b_0)$ est infini alors on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

Le segment $[a_1, b_1]$ ainsi construit est ainsi tel que $N(a_1, b_1)$ soit infini.

Supposons maintenant $[a_n, b_n]$ construit tel que $N(a_n, b_n)$ soit infini. Posons $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Comme $N(a_n, b_n) = N(a_n, c_n) \cup N(c_n, b_n)$, l'un, au moins, des deux ensembles $N(a_n, c_n)$ ou $N(c_n, b_n)$ est infini.

Si $N(a_n, c_n)$ est infini alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Si $N(c_n, b_n)$ est infini alors on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

On a ainsi construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés :

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons ℓ leur limite commune.

Reste à montrer qu'il existe une application σ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ .

Posons $\sigma(0) = 0$.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\sigma(n)$ égal à un indice strictement supérieur à $\sigma(n-1)$ qui est situé dans $N(a_n, b_n)$. (Il en existe nécessairement puisque $N(a_n, b_n)$ est infini : on peut, par exemple, choisir le plus petit)

La suite $(u_{\sigma(n)})$ est extraite de (u_n) et $a_n \leq u_{\sigma(n)} \leq b_n$ donc $(u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ .