

Premier énoncé : cas d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit λ un réel.

Alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

Démonstration :

Supposons $f = 1$ sur $[a, b]$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons f en escalier sur $[a, b]$. Alors, si $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{[a_{i-1}, a_i[}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} e^{i\lambda t} dt$$

D'où, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons enfin f continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ pour la norme uniforme, il existe $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que :

$$\|f - e\|_\infty \leq \varepsilon$$

Écrivons :

$$f = (f - e) + e$$

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} (f(t) - e(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)| dt \leq \|f - e\|_\infty (b - a) \leq \varepsilon (b - a)$$

Et d'autre part, comme e est en escalier, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

C'est-à-dire :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, (\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \leq \varepsilon)$$

On en déduit que pour tout λ tel que $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \varepsilon (b - a) + \varepsilon$$

Ce qui signifie bien :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Remarques :

- Ce raisonnement fonctionne encore si on suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$.
- Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, une simple intégration par parties suffit à prouver le lemme (voir énoncé 2)
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, le passage à la partie réelle et à la partie imaginaire donne :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(\lambda t) f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$$

Deuxième énoncé : cas d'une fonction de classe C^1

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit λ un réel.

Alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Démonstration :

Les applications f et $t \mapsto e^{it}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$, on a, par une intégration par parties :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \left[f(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} f'(t) dt = \frac{1}{i\lambda} \left[f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \right]$$

D'où :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Notons $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ (existe car, par hypothèse, f' est continue sur le compact $[a, b]$)

Ainsi :

$$0 \leq \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} [|f(b)| + |f(a)| + (b-a)M]$$

D'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$