

On présente ici diverses méthodes qui établissent le résultat :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

On précise, au préalable, que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ relève du théorème spécial à certaines séries alternées (T.S.C.S.A.). C'est-à-dire vérifie les trois hypothèses :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^{n-1}|u_n|$

(ii) la suite $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante

(iii) la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0

En conséquence la série considérée est bien convergente.

Ceci dit, certaines des méthodes ci-dessous redémontrent ce résultat.

1. Intégration d'une série géométrique

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1}$$

L'astuce est de remarquer que :

$$\frac{1}{p+1} = \int_0^1 t^p dt$$

On a alors :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^1 (-t)^p dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p dt$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$$

D'où :

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

On a donc :

$$|S_n - \ln 2| \leq \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

Et comme :

$$\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$$

En conséquence S_n admet bien une limite et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$

On a prouvé :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2. Utilisation d'un développement en série entière avec étude sur le cercle de convergence

On utilise ici le développement en série entière en 0 de l'application :

$$x \mapsto \ln(1+x)$$

On sait que le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

On a déjà dit, plus haut, que cette somme est convergente encore en $x = 1$.

Ceci dit, nous avons besoin d'un argument de continuité (en 1) pour affirmer que la somme (pour x fixé égal à 1) est égale à $\ln 2$.

Pour cela, nous allons montrer que la série (d'applications) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

En effet, pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge d'après le T.S.C.S.A..

On a alors la majoration du reste suivante :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

En conséquence :

$$\|R_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Ce qui prouve que la suite des restes converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, donc la série d'application

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et donc, par continuité de sa somme sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

Remarque : on pouvait également utiliser le théorème de continuité radiale

3. Utilisation d'un théorème d'interversion des symboles

On considère la suite d'application $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1+x}$$

Nous allons prouver que $\int_0^1 f_n(x) dx$ admet une limite (lorsque n tend l'infini) que nous calculerons.

On constate, dans un premier temps, que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers l'application f

définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Comme f n'est manifestement pas continue en 1, les théorèmes classiques ne s'appliquent pas.

Nous allons vérifier les différentes hypothèses du théorème de convergence dominée :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $[0, 1]$ (et donc localement intégrable sur $[0, 1]$)

(ii) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une application f continue par morceaux sur $[0, 1]$

(iii) hypothèse de domination : il existe une application φ (à savoir $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour $x \in [0, 1]$) positive, continue (par morceaux) et donc intégrable sur $[0, 1]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \text{ sur } [0, 1]$$

Du théorème de convergence dominée pour l'intégration sur un segment, des suites d'applications convergeant simplement, on déduit :

$$\int_0^1 f_n(x) dx \text{ admet une limite et : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{On a donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \ln 2$$

Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème de convergence monotone.

Maintenant, nous allons calculer cette limite différemment, en remarquant que :

$$\forall x \in [0, 1[, f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 + x} = (1 - x) \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} = (1 - x) \sum_{k=0}^n (x^2)^k$$

On constate, a posteriori, que le premier et le dernier membre ci-dessus sont encore égaux si $x = 1$.

On a donc :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 x^{2k} - x^{2k+1} dx = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Ce qui prouve bien que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

4. Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

On considère l'application :

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x)$$

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } [0, 1] \text{ et : } \forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

On montre alors, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$\wp(k) : \forall x \in [0, 1], f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

- Le calcul de f' ci-dessus montre qu'on a $\wp(1)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(k)$:

$$\forall x \in [0, 1], f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

En dérivant, on obtient : $\forall x \in [0, 1], f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$

D'où $\wp(k+1)$.

On a montré : $\wp(1)$ et $(\forall k \in \mathbb{N}^*, \wp(k) \Rightarrow \wp(k+1))$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \wp(k)$$

C'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$

Comme f est de classe C^∞ , l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ sur l'intervalle $[0, 1]$ permet d'écrire :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

Où M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[0, 1]$. Avec $M = n!$, et tenant compte du fait que $f(0) = 0$, on obtient :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que la série harmonique alternée converge bien et que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

5. Utilisation d'un développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique

On sait que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

De même : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma + o(1)$

Par différence, il vient : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 + o(1)$

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$\wp(n) : \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

• Comme $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, on a $\wp(1)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\wp(n)$: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Alors :

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

D'où $\wp(n+1)$.

On a montré : $\wp(1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1))$

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \wp(n)$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + o(1)$$

D'où, par passage à la limite :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

6. Utilisation d'une somme de Riemann

On a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Égalité qui s'écrit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

On reconnaît, dans le second membre, une somme de Riemann qui se calcule ainsi :

On considère l'application f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

7. Utilisation du théorème des suites adjacentes

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1}$$

Et :

$$u_n = S_{2n} \text{ et } v_n = S_{2n+1}$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$$

$$v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0$$

Ce qui prouve que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Notons ℓ leur limite commune.

Comme les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ , il en va de même de (S_n) .

Montrons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \quad (*)$$

Il suffit d'étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1 - (-x)^{2n}}{1+x}$$

D'où :

$$f'(x) = \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ce qui prouve la première inégalité de (*).

On montre, de même, la seconde inégalité de (*) en étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} - \ln(1+x)$$

En particulierisant $x = 1$ dans (*), on obtient :

$$u_n \leq \ln 2 \leq v_n$$

Et comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ , un passage à la limite donne :

$$\ell = \ln 2$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$