

Théorème *Théorème spécial à certaines séries dites alternées*

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série vérifiant les conditions suivantes :

- i) (u_n) est à signes alternés : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|)$
- ii) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0
- iii) la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Alors dans ces conditions :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente et son reste } R_n = \sum_{k \geq n+1} u_k \text{ vérifie :}$$

$$\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} u_{n+1} \text{ et } |R_n| \leq |u_{n+1}|$$

Démonstration :

Posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$$

(Le cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ est analogue)

Considérons les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_n = S_{2n+1} \text{ et } b_n = S_{2n}$$

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 0$$

La suite (a_n) est croissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n \leq 0$$

La suite (b_n) est décroissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Notons S leur limite commune. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, on déduit :

$$u_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$, on déduit :

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2}$$

On a donc :

$$(*) \quad \begin{cases} u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0 \\ 0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2} \end{cases}$$

Ceci prouve déjà :

$$\operatorname{sgn}(R_{2n}) = \operatorname{sgn}(u_{2n+1}) = \text{négatif}$$

$$\operatorname{sgn}(R_{2n+1}) = \operatorname{sgn}(u_{2n+2}) = \text{positif}$$

On peut donc affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}(u_{n+1})$$

De plus, en passant aux valeurs absolues dans (*), il vient :

$$\begin{cases} 0 \leq |R_{2n}| \leq |u_{2n+1}| \\ 0 \leq |R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}| \end{cases}$$

On peut donc affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |u_{n+1}|$$