

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ de coefficient principal 1 tel que : $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

On appelle matrice compagnon de P la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & 0 & & a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Théorème 1

Le polynôme caractéristique χ_A de A est égal à $(-1)^n P$:

$$\chi_A = (-1)^n P$$

Démonstration :

On a :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-2} \\ L_{n-1} \end{matrix}$$

En ajoutant à L_0 la combinaison des lignes $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i L_i$, on obtient, par télescopage :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -P(\lambda) \\ 1 & -\lambda & & & a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \times (-P(\lambda)) \times 1 = (-1)^n P(\lambda)$$

D'où le résultat : $\chi_A = (-1)^n P$

Remarque : la combinaison $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i L_i$ se calcule aisément ainsi :

$$\begin{array}{ll} \lambda L_1 & : \lambda \quad -\lambda^2 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \lambda a_1 \\ \lambda^2 L_2 & : 0 \quad \lambda^2 \quad -\lambda^3 \quad \dots \quad 0 \quad \lambda^2 a_2 \\ & \dots \\ \lambda^{n-2} L_{n-2} & : 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -\lambda^{n-1} \quad \lambda^{n-2} a_{n-2} \\ \lambda^{n-1} L_{n-1} & : 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \lambda^{n-1} \quad \lambda^{n-1} a_{n-1} - \lambda^n \end{array}$$

En additionnant tout, on obtient par télescopage :

$$\lambda \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i a_i - \lambda^n$$

En ajoutant à L_0 , on obtient bien la ligne : $0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -P(\lambda)$

Théorème 2 **Théorème de Cayley-Hamilton**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Le polynôme caractéristique χ_f de f est annulateur :

$$\chi_f(f) = 0$$

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

Il existe un entier $p_x \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que :

$$(x, f(x), \dots, f^{p_x}(x)) \text{ soit libre et } (x, f(x), \dots, f^{p_x+1}(x)) \text{ soit liée}$$

(Au minimum p_x est nul (lorsque $(x, f(x))$ est liée) ; au maximum $p_x = n-1$ car alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{p_x+1}(x))$ comporte $n+1$ éléments)

Donc il existe donc des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{p_x}$ (qui dépendent de x) tels que :

$$f^{p_x+1}(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{p_x} f^{p_x}(x)$$

Notons P_x le polynôme :

$$P_x = X^{p_x+1} - \sum_{j=0}^{p_x} a_j X^j$$

Ainsi on a :

$$P_x(f)(x) = 0$$

Notons $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{p_x}(x))$.

La matrice A de $\tilde{f}$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{p_x}(x))$ de F est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{p_x-1} \\ 0 & & & 1 & a_{p_x} \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 1, le polynôme caractéristique de A est égal à P_x (au signe près) :

$$\chi_A = (-1)^{p_x+1} P_x$$

Complétons la base $(x, f(x), \dots, f^{p_x}(x))$ de F afin d'obtenir une base B de E .

La matrice de f dans la base B s'écrit alors (à l'aide de blocs) :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

On a alors, (d'après les propriétés du calcul du déterminant par blocs) :

$$\chi_f = \chi_A \chi_B = (-1)^{p_x+1} P_x \chi_B$$

En passant aux endomorphismes :

$$\chi_f(f) = (-1)^{p_x+1} P_x(f) \circ \chi_B(f) = (-1)^{p_x+1} \chi_B(f) \circ P_x(f)$$

Et comme $P_x(f)(x) = 0$, on a :

$$\chi_f(f)(x) = 0$$

Ceci étant valable pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

En conséquence : $\chi_f(f) = 0$

Ce qui démontre le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 3

Le polynôme minimal π_A de A est égal à P :

$$\pi_A = P$$

Démonstration :

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On constate que :

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$

De même : $\forall j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, Ae_j = e_{j+1}$

En conséquence : $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, A^j e_1 = e_j$

Puisque B est une base, il en est donc de même de la famille $(e_1, Ae_1, \dots, A^j e_1, \dots, A^{n-1} e_1)$.

En conséquence, la famille $(e_1, Ae_1, \dots, A^j e_1, \dots, A^n e_1)$ est liée.

Soit $Q = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ un polynôme annulateur de A de degré $m < n$. Alors :

$$\sum_{j=0}^m b_j A^j = 0$$

En appliquant cette égalité matricielle à e_1 :

$$\sum_{j=0}^m b_j A^j e_1 = 0$$

Et comme la famille $(e_1, Ae_1, \dots, A^j e_1, \dots, A^m e_1)$ est libre (puisque $m < n$), on a :

$$b_0 = b_1 = \dots = b_m = 0$$

Donc Q est le polynôme nul.

En conséquence : $Q \text{ annule } A \Rightarrow Q = 0 \text{ ou } \deg Q \geq n$

Or, le polynôme minimal π_A est non nul et annulateur de A .

(En effet, par définition, π_A est le polynôme unitaire générateur de l'idéal (principal) I constitué des polynômes annulateurs de A : $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\} = \pi_A \mathbb{K}[X]$)

D'où : $\deg \pi_A \geq n$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est élément de I (puisque annulateur de A) donc π_A divise χ_A .

D'où : $\deg \pi_A = n$ et $\pi_A = P$ (car π_A unitaire)