
INTÉGRALES DE WALLIS

Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \quad K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \quad L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$$

Calcul de I_n par IPP

On a immédiatement : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$.

Pour tout $n \geq 0$, on a par IPP : ($u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t dt = \left[(\cos t)^{n+1} \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 dt$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$(\text{Variante : } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2)$$

On en déduit immédiatement : $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$; $I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}$

Formule générale :

Si n pair ($n = 2p$)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2} = \frac{C_{2p}^p \pi}{2^{2p+1}}$$

Si n impair ($n = 2p+1$)

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

Calcul de J_n en se ramenant à I_n

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\frac{\pi}{2}-u))^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n du = I_n$$

Calcul de K_n en se ramenant à I_{2n+1}

En posant $u = \text{Arcsin } t$. (Bijection de $[-1; 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). On a donc : $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} \cos u du = 2 I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Calcul de L_n en se ramenant à K_n

$$L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Équivalent des intégrales de Wallis lorsque n tend $+\infty$

On raisonne avec la suite (I_n) .

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$

En intégrant pour t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$: $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

En conséquence, la suite (I_n) est décroissante.

On a donc : $0 \leq I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

Et comme $I_{n+2} > 0$: $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$

Or, on a vu que : $\frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$ (1)

D'où : $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{n+2}{n+1}$

Par encadrement, on en déduit que $\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$ admet une limite égale à 1 en $+\infty$.

Autrement dit : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$ (2)

Montrons enfin que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante :

$$u_{n+1} = (n+2) I_{n+1} I_{n+2} \stackrel{(1)}{=} (n+1) I_n I_{n+1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc bien constante. Et comme $u_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\pi}{2}$.

En multipliant l'équivalent (2) par $(n+1)I_n$:

$$(n+1) I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

D'où : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

On retiendra ce résultat très utile :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$