

THÉORÈME DE D'ALEMBERT

Théorème

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Les démonstrations données ci-dessous font appel au *raisonnement par l'absurde*. Plus précisément : si on suppose l'existence d'un polynôme P non constant et sans racines, alors on aboutit à une contradiction.

Démonstration 1 : utilisant l'**identité de Taylor pour les polynômes**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec P **non constant et sans racines (dans $\mathbb{C}$)**.

On note encore P l'application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée au polynôme P .

Comme P est non nul (puisque **non constant**), on peut noter $n = \deg P$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons également :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{avec } a_n \neq 0$$

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ z &\mapsto |P(z)| \end{aligned}$$

On a :

- (1) : φ est continue sur $\mathbb{C}$.
- (2) : $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi(z) = +\infty$.
- (3) : φ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint son minimum

Preuve :

(1) : L'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est continue car polynomiale.

L'application "module" :

$$| \cdot | : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

l'est également. En effet, nous savons que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

$$\text{Si } |x - y| \leq \varepsilon \text{ alors } ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq \varepsilon$$

On a donc bien :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ (à savoir } \eta = 1), \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow ||x| - |y|| \leq \varepsilon)$$

Ce qui prouve que l'application "module" est uniformément continue, donc continue sur $\mathbb{C}$.

Par composition d'applications continues, on déduit la continuité de φ .

(2) : Comme $n \in \mathbb{N}^*$, car P est supposé **non constant**, on peut écrire, pour $z \neq 0$:

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right)$$

Or, on sait que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x + y| \geq ||x| - |y||$$

D'où :

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \right) \geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \right)$$

Et comme $n - k > 0$, on a :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} = 0$$

Par conséquent, en choisissant $\varepsilon = \frac{|a_n|}{2}$:

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| \geq A \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \leq \frac{|a_n|}{2})$$

D'où :

$$|z| \geq A \Rightarrow |P(z)| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$$

Enfin, comme :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |z|^n = +\infty$$

On déduit, par comparaison :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$$

D'où (2) :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi(z) = +\infty$$

(3) : Le résultat (2) s'écrit encore :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| \geq B \Rightarrow \varphi(z) \geq A)$$

En particulier pour $A = \varphi(0)$:

$$\exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| \geq B \Rightarrow \varphi(z) \geq \varphi(0))$$

D'après (1), φ est continue sur $\mathbb{C}$ donc sur le compact $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| \leq B\}$. Donc φ est bornée sur D et atteint ses bornes :

$$\exists z_0 \in D, \varphi(z_0) = \inf_{z \in D} \varphi(z)$$

Comme $0 \in D$, on a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| \geq B \Rightarrow \varphi(z) \geq \varphi(0) \geq \varphi(z_0))$$

D'où :

$$\varphi(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} \varphi(z)$$

Ce qui prouve (3) : φ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint son minimum

Venons-en maintenant au cœur de la démonstration.

Nous allons montrer qu'il existe un complexe z tel que $\varphi(z) < \varphi(z_0)$.

Appliquons l'identité de Taylor pour les polynômes :

$$\forall h \in \mathbb{C}, P(z_0 + h) = P(z_0) + P'(z_0)h + \dots + \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!} h^n$$

Comme P est supposé **sans racines** :

$$P(z_0) \neq 0$$

En outre, comme P est de degré n :

$$P^{(n)}(z_0) = n! a_n \neq 0$$

Les nombres $P^{(j)}(z_0)$, pour $1 \leq j \leq n$, ne sont donc pas tous nuls.

Soit k le plus petit entier tel que $P^{(k)}(z_0) \neq 0$. (Cet entier existe car $n \geq 1$ puisque P est **non constant**)

On a alors :

$$\forall h \in \mathbb{C}^*, \frac{P(z_0 + h)}{P(z_0)} = 1 + \frac{P^{(k)}(z_0)}{P(z_0) k!} h^k + \dots + \frac{P^{(n)}(z_0)}{P(z_0) n!} h^n$$

Posons, pour $j \in \llbracket k, n \rrbracket$:

$$a_j = \frac{P^{(j)}(z_0)}{P(z_0)j!}$$

Ainsi :

$$\forall h \in \mathbb{C}^*, \frac{P(z_0 + h)}{P(z_0)} = 1 + a_k h^k + \sum_{j=k+1}^n a_j h^j$$

Distinguons deux cas :

Cas 1 : $k < n$

Écrivons : $h = \rho e^{i\theta}$ et $a_k = r_k e^{i\alpha_k}$ (avec $\rho > 0$ et $r_k > 0$ car $P^{(k)}(z_0) \neq 0$)

Ainsi : $\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*, \forall \theta \in [0, 2\pi[$, $\frac{P(z_0 + \rho e^{i\theta})}{P(z_0)} = 1 + r_k \rho^k e^{i(k\theta + \alpha_k)} + \sum_{j=k+1}^n r_j \rho^j e^{i(j\theta + \alpha_j)}$

L'idée est de choisir θ tel que :

$$k\theta + \alpha_k = \pi$$

Ainsi : $\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{P(z_0 + \rho e^{i\theta})}{P(z_0)} = 1 - r_k \rho^k + \sum_{j=k+1}^n r_j \rho^j e^{i(j\theta + \alpha_j)}$

Par passage au module : $\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\varphi(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\varphi(z_0)} \leq |1 - r_k \rho^k| + \sum_{j=k+1}^n r_j \rho^j$

Posons $M = \max_{k+1 \leq j \leq n} r_j$, ainsi :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\varphi(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\varphi(z_0)} \leq |1 - r_k \rho^k| + M \sum_{j=k+1}^n \rho^j$$

En choisissant ρ inférieur à 1, on a :

$$\sum_{j=k+1}^n \rho^j \leq \frac{\rho^{k+1}}{1 - \rho}$$

D'où, pour $\rho \in]0, 1[$:

$$\frac{\varphi(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\varphi(z_0)} \leq |1 - r_k \rho^k| + \frac{M \rho^{k+1}}{1 - \rho}$$

Comme $r_k > 0$ et $\rho > 0$, on a :

$$|1 - r_k \rho^k| < 1$$

Par ailleurs :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{M \rho^{k+1}}{1 - \rho} = 0$$

Et en choisissant ρ assez petit, on a donc : $|1 - r_k \rho^k| + \frac{M \rho^{k+1}}{1 - \rho} < 1$

D'où

$$\varphi(z_0 + \rho e^{i\theta}) < \varphi(z_0)$$

Cas 2 : $k = n$

Alors, en reprenant les notations ci-dessus :

$$\frac{\varphi(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\varphi(z_0)} \leq |1 - r_k \rho^k| < 1$$

D'où

$$\varphi(z_0 + \rho e^{i\theta}) < \varphi(z_0)$$

Dans tous les cas, on a contredit la condition : $\varphi(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} \varphi(z)$

D'où le théorème de D'Alembert.

Démonstration 2 : utilisant un **développement en série entière**

Lemme : (formules de Cauchy)

Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, R[, I_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

Alors : $I_n(r) = a_n r^n$

Preuve du lemme :

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeant uniformément sur le disque de centre 0 et de rayon r , on peut permuter les

symboles $\int$ et $\sum$ d'où :

$$I_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta$$

Or,
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{kn}$$

D'où
$$I_n(r) = a_n r^n$$

En particulier :
$$I_0(r) = a_0$$

Ce qui prouve le lemme.

Corollaire : (Théorème de Liouville)

Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$:

Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante !

Preuve :

Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors on peut définir :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$$

Dans ce cas, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}_+, |I_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi} \times \|f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-in\theta}| d\theta = \|f\|_{\infty}$$

C'est-à-dire, d'après le lemme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}_+, a_n r^n \leq \|f\|_{\infty}$$

Donc, pour $n \geq 1$, en faisant tendre r vers $+\infty$, il apparaît que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* a_n = 0$$

D'où
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{C}$.

On en déduit le théorème de D'Alembert :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et sans racines. On peut alors définir la fraction rationnelle $f = \frac{1}{P}$.

D'après nos hypothèses, f est bornée car P est supposé sans racines.

De plus, comme P ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{C}$, donc holomorphe donc analytique.

Donc f est développable en série entière avec $R = +\infty$.

Et d'après le théorème de Liouville, f et donc P est constant. Contradiction.