

Soient α et β deux réels.

Le but est l'étude des séries :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Cas 1 : $\alpha > 1$

Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

On a, pour tout $n \geq 2$:

$$n^\gamma u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} = 0$ puisque $\frac{1-\alpha}{2} < 0$. C'est à dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n^\gamma u_n \leq \varepsilon)$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{n^\gamma})$$

Comme $\gamma > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge.

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général u_n .

Remarque : dans le cas où β est positif, du fait de la décroissance de l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut faire

le raisonnement plus rapide suivant :

On a, pour tout $n \geq 2$:

$$n^\alpha u_n = \frac{1}{(\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta}$$

En posant $M = \frac{1}{(\ln 2)^\beta}$:

$$u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$$

Or, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge (car $\alpha > 1$).

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général u_n .

Conclusion : la série de Bertrand converge.

Cas 2 : $\alpha < 1$

On a, pour tout $n \geq 2$:

$$n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$$

Or, $1 - \alpha > 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow n u_n \geq M$$

C'est-à-dire :

$$n \geq N \Rightarrow u_n \geq \frac{M}{n}$$

Or, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la divergence de la série de terme général u_n .

Conclusion : la série de Bertrand diverge.

Cas 3 : $\alpha = 1$

Étudions le sens de variation de l'application $f_\beta : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ sur $]1, +\infty[$:

$$f_\beta \text{ est dérivable et } f'_\beta(t) = -\frac{(\ln t)^\beta + \beta(\ln t)^{\beta-1}}{t^2(\ln t)^{2\beta}} = -\frac{\ln t + \beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$$

$$\text{On a : } f'_\beta(t) \leq 0 \Leftrightarrow \ln t + \beta \geq 0 \Leftrightarrow t \geq e^{-\beta}$$

Par conséquent, f_β est décroissante sur $]e^{-\beta}, +\infty[$.

Posons $n_0 = \max(3, E(e^{-\beta}) + 2)$.

Ainsi, f_β est décroissante sur $[n_0 - 1, +\infty[$ et pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \leq \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$$

D'où, par sommation, pour n allant de n_0 à N :

$$\int_{n_0}^{N+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \leq \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_{n_0-1}^N \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$$

Par changement de variable $u = \ln t$ (et donc $t = e^u$, $dt = e^u du$) dans les intégrales :

$$\int_{\ln(n_0)}^{\ln(N+1)} \frac{1}{u^\beta} dt \leq \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \int_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)} \frac{1}{u^\beta} dt \quad (*)$$

À ce stade distinguons différents cas :

$\beta = 1$

Dans ce cas, on obtient :

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(n_0)) \leq \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(n_0-1))$$

Or, la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n_0))$ diverge.

Il en va donc de même de la série de Bertrand.

$\beta > 1$

Dans ce cas, on obtient :

$$\sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \left[\frac{1}{(1-\beta)u^{\beta-1}} \right]_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)}$$

$$\sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{1}{(\ln(n_0-1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(N))^{\beta-1}} \right)$$

Or, comme $\beta > 1$, $\frac{1}{(\ln(N))^{\beta-1}}$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Les sommes partielles sont donc majorées donc la série de Bertrand converge.

$\beta < 1$

Dans ce cas, on peut procéder comme ci-dessus en utilisant l'autre inégalité de (*) pour prouver que les sommes partielles divergent. Mais il y a plus simple !

$$\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n \ln n}$$

Et d'après le cas $\beta = 1$, la série de Bertrand diverge.

RÉSUMÉ

La série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

- converge si et seulement si ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$))
- diverge si et seulement si ($\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$))