

THÉORÈME DE CARTAN-DIEUDONNÉ DANS LE PLAN

Théorème

Toute isométrie du plan affine E peut se décomposer en un produit d'au plus trois réflexions.

Lemme

Une isométrie du plan affine E possédant trois points fixes non alignés est l'identité

Preuve du lemme :

Soit t une isométrie du plan affine E . Soit $\vec{t}$ l'isométrie vectorielle associée, dans le plan vectoriel associé $\vec{E}$.

Soient A, B et C trois points fixes de t .

Comme A, B, C ne sont pas alignés, $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de $\vec{E}$.

D'autre part, comme A, B et C sont fixes par t , les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont fixes par $\vec{t}$.

Soit $\vec{u} \in \vec{E}$. Notons :
$$\vec{u} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

Par linéarité de $\vec{t}$, on déduit :

$$\vec{t}(\vec{u}) = \vec{t}(\alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}) = \alpha \vec{t}(\vec{AB}) + \beta \vec{t}(\vec{AC}) = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} = \vec{u}$$

Ce qui prouve que t est une translation ou l'identité.

Or, si t était une translation, elle n'aurait pas de points fixes, donc :

$$t = Id$$

Démonstration du théorème de Cardan-Dieudonné :

Soit t une isométrie de E .

1) Si $t = Id$, alors on peut écrire $t = s \circ s$ ou s est une réflexion quelconque et c'est fini.

2) Si $t \neq Id$, alors il existe au moins un point A tel que $A' = t(A) \neq A$.

Soit Δ la médiatrice de $[AA']$.

On remarque alors que :
$$s_{\Delta} \circ t(A) = s_{\Delta}(A') = A$$

Donc A est un point fixe de $s_{\Delta} \circ t$.

a) Si $s_{\Delta} \circ t = Id$, alors $t = s_{\Delta}$ est c'est fini.

b) Si $s_{\Delta} \circ t \neq Id$, alors il existe au moins un point B tel que $B' = s_{\Delta} \circ t(B) \neq B$.

Soit Δ' la médiatrice de $[BB']$.

Montrons que A est fixe par $s_{\Delta'}$:

Comme $s_{\Delta} \circ t$ est une isométrie, on a :
$$AB' = AB$$

Donc $A \in \Delta'$. C'est-à-dire :
$$s_{\Delta'}(A) = A$$

A est fixe par $s_{\Delta'}$.

En conséquence, on a :

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t(A) = A$$

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t(B) = B$$

i) Si $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t = Id$, alors $t = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$ et c'est fini.

ii) Si $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t \neq Id$, il existe au moins un point C tel que $C' = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t(C) \neq C$.

Comme A et B sont fixes par l'isométrie $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t$, on a : $AC = AC'$ et $BC = BC'$

Donc A et B sont sur la médiatrice Δ'' de $[CC']$.

On en déduit que A , B et C sont non alignés et sont des points fixes de $s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t$.

D'après le lemme : $s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ t = Id$

D'où : $t = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta''}$

Ce qui prouve le théorème.