

CONVERGENCE SIMPLE, UNIFORME, UNIFORME SUR TOUT COMPACT D'UNE SUITE D'APPLICATIONS

Contexte :

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}$ -ev.

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un evn de dimension finie.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E .

Définitions :

1. On dit que la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers une application f si :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(x, \varepsilon) \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$$

Ce qui revient à dire :

Pour chaque $x \in X$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ (pour la norme $\| \cdot \|$ de E)

On note alors :

$$f_n \xrightarrow{CS} f \text{ sur } X$$

2. On dit que la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une application f si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$$

On note alors :

$$f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } X$$

3. On dit que la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de X vers une application f si :

$$\text{Pour tout compact } C \text{ de } X, f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } C.$$

On note alors :

$$f_n \xrightarrow{CC} f \text{ sur } X$$

Comparaison de ces différents modes de convergence :

1. Supposons $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X .

Soient $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse, on a :

$$\exists N(\varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$$

Ce qui prouve : $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur X

Donc : **la convergence uniforme entraîne la convergence simple**

2. Supposons $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X .

Soit C un compact de X . Alors :

$$f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } C.$$

Ce qui prouve :

$$f_n \xrightarrow{CC} f \text{ sur } X$$

Donc : **la convergence uniforme entraîne la convergence uniforme sur tout compact**

On verra plus loin des les réciproques de ces deux implications sont fausses.

Auparavant, nous devons approfondir la notion de convergence uniforme.

Notion de "norme infinie" d'une fonction bornée :

Soit f une fonction bornée sur X . Alors f admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Définissons alors :

$$\forall f \in B(X, E) \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

On vérifiera (à titre d'exercice) que l'application $\| \cdot \|_{\infty} : B(X, E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une norme.

Proposition :

Une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une application f ssi :

- i) $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow f_n - f \text{ bornée sur } X)$
- ii) La suite numérique $(\|f_n - f\|_{\infty})$ converge vers 0.

Démonstration :

Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers une application f .

En particulierisant la définition de la convergence uniforme avec $\varepsilon = 1$, on obtient :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq 1)$$

Ce qui prouve : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow f_n - f \text{ bornée sur } X)$

Les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X pour tout $n \geq N_1$, donc dans ce cas, $\|f_n - f\|_{\infty}$ existe bien.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a d'une part : (d'après la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur X)

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$$

Posons $N = \max(N(\varepsilon), N_1)$. Pour tout $n \geq N$, on a alors :

$$f_n - f \text{ bornée sur } X \text{ et } \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Par passage à la borne supérieure sur $x \in X$, on en déduit :

$$\|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve bien : La suite numérique $(\|f_n - f\|_{\infty})_{n \geq N}$ converge vers 0.

Réciproquement supposons vérifiées les assertions i) et ii).

On a pour $n \geq N_1$:

$$\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_{\infty}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la suite numérique $(\|f_n - f\|_{\infty})$ converge vers 0 :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon)$$

Pour $n \geq \max(N_1, N)$, la transitivité des inégalités donne :

$$\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve bien : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f

Corollaire :

Soit une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **bornées** convergeant **uniformément** vers f sur X .

Alors f est **bornée**.

Démonstration :

Il suffit d'écrire :

$$f = (f - f_n) + f_n$$

D'après la proposition précédente :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow f_n - f \text{ bornée sur } X)$$

Comme f_n est également bornée, on en déduit que f est bornée.

Donnons maintenant un des critères les plus utilisés pour montrer qu'une convergence est uniforme :

Proposition :

Soit une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **bornées** et f une application **bornée**.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \Leftrightarrow \text{la suite numérique } (\|f_n - f\|_\infty) \text{ converge vers } 0.$$

Démonstration :

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

Important : par contraposition, on obtient :

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers } f \Leftrightarrow \text{la suite numérique } (\|f_n - f\|_\infty) \text{ ne converge pas vers } 0.$$

Et a fortiori, s'il existe une suite (x_n) d'éléments de X **convergente dans X** pour laquelle la suite $(\|f_n(x_n) - f(x_n)\|)$ ne converge pas vers 0 alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f .

Exemples :

1) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x$ sur $X = \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x)| \leq x e^{-nx}$$

Posons $g_n(x) = x e^{-nx}$. On a :

$$g'_n(x) = (1 - nx) e^{-nx}$$

On a :

$$g'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - nx \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{n}$$

D'où

$$g_n \text{ croissante sur } [0 ; \frac{1}{n}] \text{ et décroissante sur } [\frac{1}{n} ; +\infty[$$

Donc g_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et admet son maximum en $\frac{1}{n}$ et :

$$\|g_n\|_\infty = \frac{1}{ne}$$

La suite $(\|g_n\|_\infty)$ tendant vers 0, on en déduit alors :

$$g_n \xrightarrow{CU} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

D'où, par comparaison :

$$f_n \xrightarrow{CU} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

2) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Étudions déjà la convergence simple.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc :

$$f_n \xrightarrow{CS} 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Montrons maintenant que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de remarquer :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Comme la suite ci-dessus ne converge pas vers 0, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Comparaison des différents modes de convergence (suite) :

Définissons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Étude de la convergence simple :

Pour tout $x \in [0, 1[$ fixé, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f = 0$.

Étude de la convergence sur tout compact :

Soit C un compact de $[0, 1[$. Donc il existe un réel a de $[0, 1[$ tel que : $C \subset [0, a]$.

Or :

$$\sup_{x \in [0, a]} x^n = a^n$$

Et comme $a \in [0, 1[$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[0, a]$ donc sur le compact C .

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $[0, 1[$.

Étude de la convergence uniforme :

On a :

$$m_n = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1$$

La suite (m_n) ne tendant pas vers 0, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

Retenir :

la convergence uniforme sur tout compact n'entraîne pas la convergence uniforme en général

Définissons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Étude de la convergence simple :

Pour tout $x \in [0, 1[$ fixé, on a :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

Et si $x = 1$:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Étude de la convergence uniforme :

On a :
$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Donc :
$$m_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1$$

La suite (m_n) ne tendant pas vers 0, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

Retenir :

la convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme en général

Remarque : On peut prouver autrement, à l'aide de la continuité (voir ci-dessous), qu'une suite d'applications ne converge pas uniformément.

Théorème

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **continues** définies sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$.

- 1) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformément** sur I vers une application f , alors f est **continue**.
- 2) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformément sur tout compact** de I vers f , alors f est **continue**.

Démonstration :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications **continues** définies sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$.

- 1) On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur I vers une certaine application f .

Soit $a \in I$. Montrons que f est continue en a :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On sait que f_n converge uniformément sur I vers f :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$$

On sait que f_N est continue en a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, (|x - a| < \eta \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(a)\| < \varepsilon)$$

Pour un tel η , on a alors :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f_N(a) - f(a)\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \leq 3\varepsilon$$

On en déduit : f continue en a

D'où : f continue sur I

- 2) On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout compact** de I vers f .

Soit $a \in I$.

Soit C un compact contenant a .

D'après 1), f est continue sur C donc en a .

Donc f est continue sur I .

Corollaire :

Si une suite d'applications **continues** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une application f **non continue**, alors la convergence n'est pas uniforme.

Démonstration :

Si la convergence était uniforme, f serait nécessairement continue. (Théorème précédent)

Comme ce n'est pas le cas, la convergence ne peut pas être uniforme.

Applications :

On retrouve ainsi le fait que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

ne peut converger uniformément sur $[0, 1]$. (Puisque sa limite simple f n'est pas continue)