

## DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CIRCULANTE

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. On considère la matrice  $M$  élément de  $M_n(\mathbb{C})$  définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-2} \\ \ddots & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots \\ a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $\det(M)$ .

On introduit la matrice circulante élémentaire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $B(e_1, \dots, e_n)$  une base et  $f$  l'endomorphisme tel que  $A = \text{mat}_B(f)$ .

On constate que :  $f(e_1) = e_n$  et  $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_k) = e_{k-1}$

On en déduit facilement que :  $f^n = \text{Id}$

C'est-à-dire :  $A^n = I_n$

Le polynôme  $Q$  défini par  $Q = X^n - 1$  est donc annulateur de  $A$ .

Or, s'il existait un polynôme non nul  $S = \sum_{j=0}^{n-1} s_j X^j$  élément de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  annihilant  $A$ , on aurait en particulier :

$$S(f)(e_n) = \sum_{j=0}^{n-1} s_j f^j(e_n) = \sum_{j=0}^{n-1} s_j e_{n-j} \neq 0 \text{ car la famille } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre et les } s_j \text{ sont non tous nuls}$$

C'est-à-dire :  $S(f) \neq 0$

Le polynôme  $Q$  est donc le polynôme minimal de  $A$ .

Les valeurs propres de  $A$  sont donc les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité :

$$\text{Sp}(A) = \mathbb{U}_n$$

Comme  $Q$  est scindé, à racines simples et annulateur de  $A$ , on en déduit que  $A$  est diagonalisable :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}\left(1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right)$$

Posons :  $R = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{C}[X]$

On a ainsi :  $M = R(A)$

Or,  $A$  étant diagonalisable, il en va de même de  $M$  et on aura :

$$M = R(PDP^{-1}) = PR(D)P^{-1}$$

Donc  $M$  est semblable à la matrice diagonale  $R(D)$ .

Comme le déterminant de  $M$  est égal à celui de  $D$  (puisque  $M$  et  $D$  sont semblables) :

$$\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} R\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$