

Théorème

Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Il existe des applications en escaliers φ et ψ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } [a, b] \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon \text{ sur } [a, b]$$

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une subdivision régulière $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ du segment $[a, b]$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, elle l'est aussi sur chacun des segments $[a_k, a_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq n-1$), donc f est bornée, ce qui permet de définir :

$$M_k = \sup_{t \in [a_k, a_{k+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad m_k = \inf_{t \in [a_k, a_{k+1}]} f(t)$$

On définit alors des applications en escalier φ et ψ sur $[a, b]$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [a_k, a_{k+1}[, \varphi(t) = m_k \text{ et } \psi(t) = M_k$$

et :

$$\varphi(b) = m_{n-1} \text{ et } \psi(b) = M_{n-1}$$

Ainsi, on a bien :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } [a, b]$$

Par ailleurs, f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y est **uniformément continue** (théorème de Heine) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \eta \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in [a, b]^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Soit η le réel obtenu pour le réel ε fixé dans les hypothèses.

On sait que le pas de la subdivision est :

$$\frac{b-a}{n}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $(x, y) \in [a_k, a_{k+1}]$. On a donc :

$$|x - y| \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{b-a}{n}$$

Choisissons un pas plus fin que η , obtenu pour les entiers n qui vérifient :

$$n \geq E\left(\frac{b-a}{\eta}\right) + 1$$

Ainsi :

$$|x - y| \leq \eta$$

De la continuité uniforme de f , on déduit alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tous x et y de $[a_k, a_{k+1}]$.

En particulier pour un x tel que $f(x) = M_k$ et un y tel que $f(y) = m_k$ (existent bien car f atteint ses bornes) :

$$M_k - m_k \leq \varepsilon$$

D'où

$$\psi - \varphi \leq \varepsilon \text{ sur chaque } [a_k, a_{k+1}] \text{ et donc sur } [a, b]$$

Remarque : cette démonstration peut être adaptée aux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$.