

**Théorème 1**

Soit  $I = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

Alors  $f$  est **bornée sur  $I$** .

**Démonstration :**

Supposons  $f$  non **bornée** sur  $I$ .

Soit  $c$  le milieu de  $I$ .

Posons  $a_1 = a$  et  $b_1 = c$  si  $f$  non bornée sur  $[a, c]$ .

Posons  $a_1 = c$  et  $b_1 = b$  sinon.

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Sur chacun de ces intervalles,  $f$  est, par construction, non bornée.

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b-a}{2^n}$ .

Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes.

Notons  $x_0$  leur limite commune.

Comme  $f$  est continue en  $x_0$ , on a (avec  $\varepsilon = 1$ ) :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1)$$

C'est-à-dire :  $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1)$

Donc  $f$  est bornée sur  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ .

Comme les segments  $[a_n, b_n]$  ont des longueurs qui tendent vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : (n \geq N \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon)$$

Donc, pour un certain  $N$ , les segments  $[a_n, b_n]$ ,  $n \geq N$ , sont contenus dans  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ .

Or,  $f$  n'est pas bornée sur  $[a_n, b_n]$  d'où une contradiction.

Donc  $f$  est bornée sur  $I$ .

**Théorème 2**

Soit  $I = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

Alors  $f$  **atteint ses bornes**.

**Démonstration :**

D'après le théorème 1, on sait que  $f$  est bornée. Notons  $M = \sup_I f$  et  $m = \inf_I f$ .

Montrons qu'il existe  $x_0$  dans  $I$  tel que  $f(x_0) = M$ .

Comme  $M$  est la borne supérieure de  $f$  sur  $I$  :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

En particulier, avec  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  :  $\exists x_n \in I : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

La suite  $(f(x_n))$  converge donc vers  $M$ .

En outre, la suite  $(x_n)$  est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous suite qui converge vers un certain réel  $x_0$ . Notons  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une application strictement croissante telle que  $(x_{\varphi(n)})$  converge vers  $x_0$ .

La fonction  $f$  étant continue en  $x_0$ , on a :  $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x_0)$ .

Donc  $f$  atteint son maximum.

On démontre, de même, que  $f$  atteint son minimum.

### Corollaire

Soit  $I = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

Alors  $f(I)$  est un segment.

### Démonstration :

On sait déjà, que l'image (par  $f$  continue) d'un intervalle est un intervalle.

D'après le théorème 1,  $J = f(I)$  est un intervalle borné.

D'après le théorème 2,  $J$  est fermé.

Donc  $J$  est un segment.