

DIFFÉRENTES FORMULES DE TAYLOR POUR UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE

Introduction

Soient f une fonction de classe C^p sur un intervalle I , $a \in I$ et T_p un polynôme de degré p tel que :

$$T_p(a) = f(a) ; T_p'(a) = f'(a) ; \dots ; T_p^{(p)}(a) = f^{(p)}(a)$$

Nous savons que toute famille de $p + 1$ éléments échelonnée en degré est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

On peut donc écrire :

$$T_p(x) = \sum_{j=0}^p \lambda_j (x-a)^j$$

On a :

$$T_p^{(k)}(x) = k! \lambda_k + \sum_{j=k+1}^p C_j^k k! \lambda_j (x-a)^{j-k}$$

D'où :

$$T_p^{(k)}(a) = k! \lambda_k \text{ et } \lambda_k = \frac{T_p^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

On a donc :

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

T_p s'appelle le polynôme de Taylor à l'ordre p de la fonction f en a .

1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1

Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Alors :

$$\forall x \in I, f(x) = T_p(x) + R_p(x)$$

où

$$T_p(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \text{ et } R_p(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

(T_p s'appelle encore la partie régulière d'ordre p du développement de Taylor et R_p est le reste intégral d'ordre p)

Démonstration par récurrence finie sur $n \leq p$:

On considère la propriété H_n définie pour $n \in \llbracket 0, p \rrbracket$ par :

$$H_n : \forall x \in I, f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Le point de départ : on sait que : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in I$, ce qui est H_0 .

Supposons que H_{n-1} soit vraie pour un certain entier n tel que $1 \leq n \leq p$.

À l'aide d'une intégration par parties de $R_n(x)$, il vient :

$$(\text{en posant } u_n'(t) = f^{(n+1)}(t), v_n(t) = (x-t)^n, u_n(t) = f^{(n)}(t) \text{ et } v_n'(t) = -n(x-t)^{n-1}) :$$

$$R_n(x) = \left[\frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!} \right]_a^x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt = -T_n(x) + T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \stackrel{\text{HR}}{=} -T_n(x) + f(x) \text{ d'où } H_n.$$

Autres formulations :

En posant $h = x - a$, la formule de Taylor peut encore s'écrire :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^p \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

Et, en posant $u = t - a$ dans le reste intégral, on obtient ($du = dt$) :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^p \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_0^h \frac{(h-u)^p}{p!} f^{(p+1)}(a+u) du$$

2. Formule de Taylor-Lagrange. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 2

Soit f une fonction de classe C^p et $(p+1)$ fois dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ et à **valeurs réelles**.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)$$

Démonstration 1 :

Posons $\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} A$ et choisissons A tel que $\varphi(a) = 0$.

$$(\text{On a donc } \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} A = f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a))$$

En outre, on a $\varphi(b) = 0$.

Puisque f est de classe C^p sur I , la fonction φ est dérivable sur I et l'on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^p \left[\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) \right] + \frac{(b-t)^p}{p!} A \\ \varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^p \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \sum_{k=1}^p \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(b-t)^p}{p!} A \\ \varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^p \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \frac{(b-t)^p}{p!} A \\ \varphi'(t) &= -\frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) + \frac{(b-t)^p}{p!} A = \frac{(b-t)^p}{p!} (A - f^{(p+1)}(t)) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rolle (φ est dérivable sur $[a, b]$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$), $\exists c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc tel que :

$$A = f^{(p+1)}(c) \text{ d'où la formule de Taylor-Lagrange.}$$

Dans le cas où, de plus, $f^{(p+1)}$ est continue sur I , on a la démonstration 2 suivante plus simple :

On a :

$$R_p(b) = \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt .$$

Or :

$$\frac{(b-t)^p}{p!} \geq 0 \text{ sur } [a, b].$$

D'après la formule de la moyenne (voir exposé sur la définition de l'intégrale), on a :

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } R_p(b) = f^{(p+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} dt = \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)$$

La formule de Taylor-Lagrange n'est pas valable si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Inégalité de Taylor-Lagrange :

En majorant le reste intégral (ou le reste dans la formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions réelles $\mathbb{R}$) :

La fonction $f^{(p+1)}$ étant continue sur le compact $[a, x]$ (ou $[x, a]$), il existe un majorant M de $|f^{(p+1)}|$ sur ce compact. On a alors :

$$|R_p(x)| \leq \frac{M}{p!} \int_a^x |(x-t)^p| dt$$

$$|R_p(x)| \leq M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Attention, dans l'inégalité ci-dessus, le majorant M dépend de p .

D'où l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème 3

Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur une intervalle I et soit $a \in I$.

Soit M un majorant de $|f^{(p+1)}|$ sur l'intervalle $[a, x]$ (ou $[x, a]$).

$$\text{Alors pour tout } x \in I : \quad |f(x) - T_p(x)| \leq M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Autre écriture :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \|f^{(p+1)}\|_{\infty} \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

3. Aspect local : formule de Taylor-Young

Théorème 4

Soit f une fonction de classe C^p sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Alors pour x situé au voisinage de a : $f(x) = T_p(x) + o((x-a)^p)$

Démonstration :

Soit $x \in I$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $p-1$ sur l'intervalle $[a, x]$.

$$\exists c \in I \text{ tel que } f(x) = T_{p-1}(x) + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(c)$$

Lorsque x tend vers a , c tend nécessairement vers a , si bien que l'on a :

$$f^{(p)}(c) = f^{(p)}(a) + \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

D'où :

$$f(x) = T_{p-1}(x) + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(x-a)^p}{p!} \varepsilon(x)$$

$$f(x) = T_p(x) + o((x-a)^p) \text{ au voisinage de } a.$$