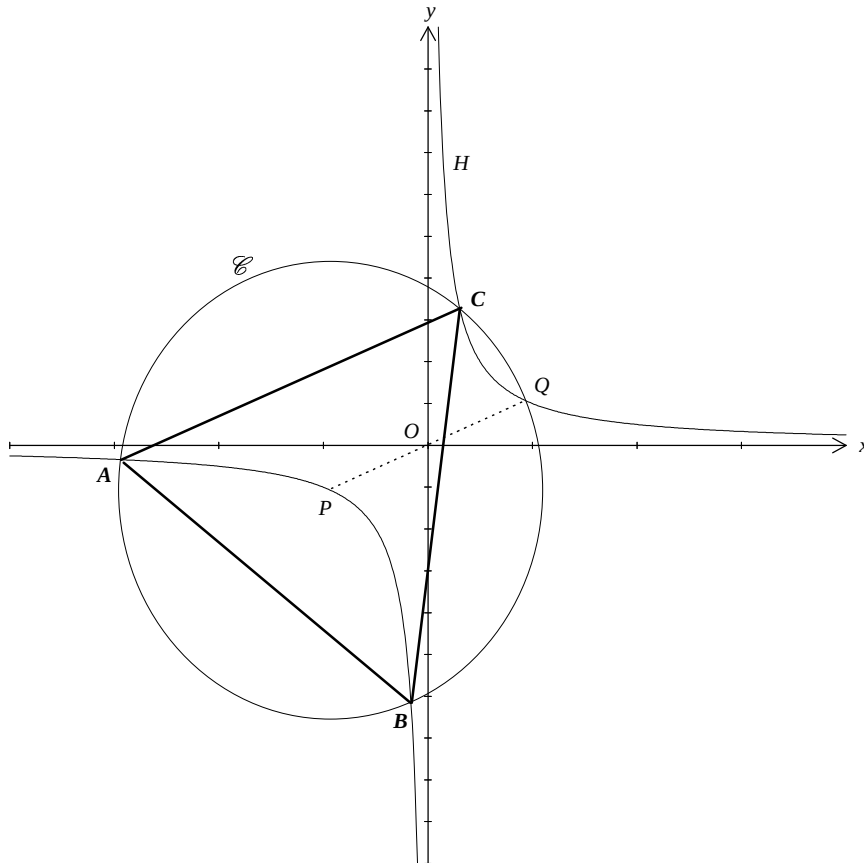


PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Dans le plan affine muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'hyperbole équilatère H d'équation : $y = \frac{1}{x}$. Soient P un point de H , Q le symétrique de P par rapport à O et $\mathcal{C}$ le cercle de centre P et de rayon $[PQ]$. On note A et B les deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la branche de H portant P . On note C le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la branche de H portant Q . (Éventuellement, $C = Q$) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.



Notons $\left(p ; \frac{1}{p}\right)$ les coordonnées de P . Celles de Q sont donc $\left(-p ; -\frac{1}{p}\right)$.

L'équation du cercle $\mathcal{C}$ est :

$$(x-p)^2 + \left(y - \frac{1}{p}\right)^2 = PQ^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

Soit $M(x, y)$ un point de $H \cap \mathcal{C}$. Alors $x \neq 0$ et vérifie :

$$(x-p)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{p}\right)^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

(Équation aux abscisses)

En multipliant par x^2 :

$$x^2(x^2 - 2px + p^2) + 1 - \frac{2}{p}x + \frac{1}{p^2} = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)x^2$$

On sait déjà que $-p$ est une racine de cette équation. Notons x_A, x_B, x_C les trois autres racines.

D'après les relations entre les coefficients et les racines, on sait que $x_A + x_B + x_C - p$ est égal à l'opposé du coefficient de x^3 :

$$x_A + x_B + x_C - p = 2p$$

D'où :

$$\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = p$$

On montre, de même, en considérant l'équation aux ordonnées :

$$\left(\frac{1}{y} - p\right)^2 + \left(y - \frac{1}{p}\right)^2 = 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

que l'on a :

$$\frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{p}$$

Ce qui prouve :

P est le centre de gravité du triangle ABC

Par ailleurs, P étant le centre du cercle circonscrit à ABC , médianes et médiatrices sont confondues.

Donc ABC est équilatéral.