

Définition 1

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est convexe si :

$$\forall (a ; b) \in X^2 : [a ; b] \subset X$$

Par convention, $\emptyset$ est convexe.

Définition 2

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle induite par $\mathbb{R}$). On dit que X est connexe si :

Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts O_1 et O_2 (de X) non vides

Par convention, $\emptyset$ est connexe.

Autrement dit, X est connexe si et seulement si :

$$(X = O_1 \cup O_2 \text{ et } O_1 \cap O_2 = \emptyset \text{ et } O_1 \text{ et } O_2 \text{ ouverts de } X) \Rightarrow (O_1 = \emptyset \text{ ou } O_2 = \emptyset)$$

Théorème

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On a équivalence entre

1. X est un intervalle.
2. X est convexe.
3. X est connexe

Démonstration :

Montrons $1 \Rightarrow 2$

Soit X un intervalle non vide et non réduit à un point (sinon c'est évident)

Cas 1 : X est fermé borné : $X = [a ; b]$

Soit x et y dans X avec $x \leq y$. Alors $a \leq x \leq y \leq b$. Donc $[x ; y] \subset I$.

Cas 2 : X est borné. Idem qu'en 1 avec, le cas échéant, les inégalités strictes.

Cas 3 : X non borné. Par exemple : $X = [a ; +\infty[$.

Soit x et y dans X avec $x \leq y$. Alors $a \leq x \leq y$. Donc $[x ; y] \subset I$.

Les autres cas ($]a ; +\infty[;]-\infty ; b]$; $]-\infty ; b[; \mathbb{R}$) se démontrent de manière analogue.

Dans tous les cas, on déduit : X est convexe.

Montrons $2 \Rightarrow 1$

Soit X un convexe.

Si X est vide, c'est bien un intervalle. Supposons désormais X non vide.

Cas 1 : X n'est ni majoré, ni minoré.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (y ; z) \in X^2 : y < x < z$

Comme X est convexe, on a : $[y ; z] \subset X$. Donc $x \in X$. D'où $X = \mathbb{R}$.

Cas 2 : X est majoré et non minoré

Posons $b = \sup X$. (Existe car X est non vide et majoré). Ainsi $X \subset]-\infty ; b]$.

Soit x un réel tel que $x < b$.

Comme X n'est pas minoré, il existe z dans X tel que : $z < x$.

En outre, x n'est pas un majorant de X , donc il existe y dans X tel que : $x < y$.

Enfin, comme X est convexe, $[y ; z] \subset X$ et donc $x \in X$.

Donc X est l'intervalle $]-\infty ; b]$ ou $]-\infty ; b[$.

Cas 3 : X est minoré et non majoré. Analogie au cas 2.

X est un intervalle du type $]a ; +\infty[$ ou $[a ; +\infty[$.

Cas 4 : X est borné. Notons $a = \inf X$ et $b = \sup X$.

On a alors $X \subset [a ; b]$. Soit $x \in]a ; b[$.

Comme x n'est ni un majorant, ni un minorant de X , il existe y et z dans X tels que :

$$a < y < x < z < b$$

Or, $[y ; z] \subset X$ puisque X est convexe. Donc $x \in X$.

On a donc : $]a ; b[\subset X \subset [a ; b]$

Donc X est l'un des intervalles suivants : $[a ; b]$ ou $]a ; b]$ ou $[a ; b[$ ou $]a ; b[$.

On a donc : $1 \Leftrightarrow 2$

Montrons $3 \Rightarrow 2$

Soit X un connexe.

Si $X = \emptyset$ ou $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) alors X est convexe. Supposons désormais X non vide et non réduit à un point.

Supposons X non convexe. Alors il existe a et b dans X (avec $a < b$) tels que $[a ; b] \not\subset X$.

Donc, il existe $c \in X \setminus [a ; b]$. (On a donc $a < c < b$)

Les ensembles $]-\infty ; c[\cap X$ et $]c ; +\infty[\cap X$ sont des ouverts de X .

En outre :

$$X = X \cap \mathbb{R} = X \cap (]-\infty ; c[\cup \{c\} \cup]c ; +\infty[)$$

$$\text{En distribuant : } X = (X \cap]-\infty ; c[) \cup (X \cap \{c\}) \cup (X \cap]c ; +\infty[)$$

Or, $c \notin X$ donc $X \cap \{c\} = \emptyset$. D'où :

$$X = (X \cap]-\infty ; c[) \cup (X \cap]c ; +\infty[)$$

Il existe alors une partition de X en deux ouverts non vides (le premier contient a , le second b).

Donc X n'est pas connexe.

Par contraposition, on obtient : X connexe $\Rightarrow X$ convexe.

On a donc bien $3 \Rightarrow 2$.

Montrons $2 \Rightarrow 3$

Soit X un convexe. C'est donc un intervalle.

Si $X = \emptyset$ ou $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) alors X est connexe. Supposons désormais X non vide et non réduit à un point.

Supposons X non connexe, donc :

$$X = O_1 \cup O_2 \text{ avec } O_1 \text{ et } O_2 \text{ ouverts non vides disjoints.}$$

Soient $x \in O_1$ et $y \in O_2$ avec $x < y$ (toujours possible quitte à permuter O_1 et O_2)

Posons $z = \sup(O_1 \cap [x ; y])$. Donc $x \leq z \leq y$.

Supposons $z \in O_1$.

Comme O_1 et O_2 sont disjoints et $y \in O_2$, on a nécessairement : $z \neq y$. D'où : $z < y$.

Par conséquent, $\exists h_1 > 0$ tel que $[z ; z + h_1[\subset [x ; y]$

En outre, O_1 est ouvert donc : $\exists h_2 > 0$ tel que $[z ; z + h_2[\subset O_1$.

En posant $h = \min(h_1 ; h_2)$ on obtient :

$$[z ; z + h[\subset O_1 \cap [x ; y] \quad (h > 0)$$

Ce qui contredit $z = \sup(O_1 \cap [x ; y])$.

Donc $z \notin O_1$.

Supposons $z \in O_2$.

Comme O_1 et O_2 sont disjoints et $x \in O_1$, on a nécessairement : $z \neq x$. D'où : $x < z$.

Par conséquent, $\exists h_1 > 0$ tel que $]z - h_1 ; z] \subset [x ; y]$

En outre, O_2 est ouvert donc : $\exists h_2 > 0$ tel que $]z - h_2 ; z] \subset O_2$.

En posant $h = \min(h_1 ; h_2)$ on obtient :

$$]z - h ; z] \subset O_2 \cap [x ; y] \quad (h > 0)$$

Or, $z = \sup(O_1 \cap [x ; y])$ donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists z' \in O_1 \cap [x ; y] \text{ tel que : } z - \varepsilon < z' \leq z$$

En particulier avec $\varepsilon = h$: $\exists z' \in O_1 \cap [x ; y]$ tel que : $z - h < z' \leq z$

On a alors : $z' \in O_1 \cap O_2$

Ce qui est absurde car O_1 et O_2 sont disjoints.

Donc $z \notin O_2$;

Donc z n'appartient ni à O_1 ni à O_2 , donc $z \notin X$, ce qui est impossible car X est un intervalle.

Donc X est connexe.